実解析学シンポジウム 2019

北九州

於　九州工業大学

10 月 25 日～10 月 27 日

Vol. 51

まえがき

この報告集は, 2019 年 10 月 25 日 (金) から 10 月 27 日 (日) まで, 九州工業大学に於いて開催された実解析学シンポジウム 2019 での講演をまとめたものです。開催にあたっては下記の方々にご援助いただきました。

科学研究費補助金基盤研究 (B) 15H03621 代表者 中井 英一
科学研究費補助金基盤研究 (B) 16H03943 代表者 宮地 晶彦
科学研究費補助金基盤研究 (C) 19K03546 代表者 澤野 嘉宏
科学研究費補助金基盤研究 (C) 19K03571 代表者 古谷 康雄

また, 本シンポジウムは国立大学法人九州工業大学との共催により開催されました。

最後になりましたが, 会場責任者としてお世話をいただいた九州工業大学の本田あおい氏および関係者の方々には大変お世話になりました。深く御礼申し上げます。

開催責任者
青山 耕治 (千葉大学)
松岡 勝男 (日本大学)
菅野 聡子 (神戸市立工業高等専門学校)

目次

著者の原稿をそのまま講演プログラム順に掲載しています.

原始関数による不定積分の拡張

川﨑敏治

College of Engineering, Nihon University, Fukushima 963–8642, Japan; Faculty of Engineering, Tamagawa University, Tokyo 194–8610, Japan
(E-mail: toshiharu.kawasaki@nifty.ne.jp)

1. はじめに

関数 $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 及び点 $c \in [a, b]$ に対して、$F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)dt$ によって定義される関数 F を f の不定積分という。一方、$G'(x) = f(x)$ a.e. となるような関数 G を f の（拡張された）原始関数と呼ぶことにする。

良く知られているように、関数 f が連続ならば、至る処で $F' = f$ が成り立つ（解析学の基本定理）ので、定数の差を無視すれば $G = F$ が成り立つ。

では、f が必ずしも連続でない場合はどうであろうか？

f を Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 積分可能な関数とする。f は必ずしも連続とは限らない。この場合でも殆ど同じで、$F' = f$ a.e. が成り立つので、定数の差を無視すれば $G = F$ が成り立つ。

では、Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 積分不可能な関数の場合はどうであろうか？

例えば、$f(x) = \dfrac{1}{x}$ の場合を考える。f は、点 0 を含む区間では Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 積分不可能な関数である。従って、不定積分 F は存在しない。然し乍ら、原始関数の方は存在して $G(x) = \log|x|$ である。このことは、Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 積分は更に拡張することが可能なことを示唆する。著者は、この問題に関し、Cauchy の主値の考えを取り込んだ Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 主値積分を提案してきた。

しかし、別の関数 $f(x) = \sec^2 x$ を例に取ると、点 $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ を含む区間では Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 積分不可能ではあるが、原始関数 $G(x) = \tan x$ は存在する。しかし、Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 主値積分ではない。

一般に、原始関数は無数に存在する。原始関数に連続性及び必要な条件を仮定すれば定数の差を無視すれば一意に定まる。しかし、上記の例のように、$f(x) = \dfrac{1}{x}$ や $f(x) = \sec^2 x$ に関しては、連続な原始関数とはならない。

本報告集では、このような関数も積分可能とするアイディアについて述べたい。

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 26A36; Secondary: 26A39.
Key words and phrases. primitive, indefinite integral.

2. 積分の拡張の方向性

積分は、長さ・面積・体積の拡張概念であるとともに、微分の逆演算としての側面も持っている。前者の意味で積分を捉えるとき、現代では Lebesgue 積分を考えるのが一般的であり、収束定理や Fubini の定理等応用上十分な性質を持っている。しかし、Lebesgue 積分だけでは不十分な場合もあり、そのような場合には広義 Lebesgue 積分が用いられる。一方、後者の意味で積分を捉えるときは、Newton 積分を用いる。もう少し条件を緩めたものを広義 Newton 積分可能という。残念なことに、広義 Lebesgue 積分可能ではあるが Newton 積分可能でない関数や、広義 Newton 積分可能ではあるが Lebesgue 積分可能でない関数が存在する [10]。例えば、広義 Lebesgue 積分可能であるが Newton 積分可能でない例として

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in (0,1], \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

がある。広義 Newton 積分可能ではあるが Lebesgue 積分可能でない例としては

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{if } x \in (0,1], \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

がある。故に、この両者を包含し、尚且つ、収束定理を持つような積分が必要になる。この解が、Perron 積分であり、Denjoy 積分であり、Henstock-Kurzweil 積分である。これらは同値（積分可能関数の集合が一致し積分値も一致する）であることが分かっており、応用上十分な収束定理も得られている。積分という枠組みで考えると最早これ以上の拡張は難しいように思われる。最も拡張の邪魔をしているのが、積分して得られる関数が連続でなければならないことである。一般に、区間 $[a,b]$ 上の積分 T とは、以下を満たすものを言う。

(1) 区間 $[a,b]$ の部分区間の全体を $\mathcal{I}$ とする。このとき、適当な関数空間 $\mathcal{F}$ が存在し、T は $\mathcal{F} \times \mathcal{I}$ から $\mathbb{R}$ への写像である。

(2) T は第 1 変数に関して線型である。即ち、任意の $f, g \in \mathcal{F}$ 及び任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$T(\alpha f + \beta g, [a,b]) = \alpha T(f, [a,b]) + \beta T(g, [a,b])$$

が成り立つ。

(3) T は第 2 変数に関して区間の加法性を有する。即ち、任意の $f \in \mathcal{F}$ 及び任意の $c, d, e \in [a,b]$ $(c \leq d \leq e)$ に対して

$$T(f, [c,e]) = T(f, [c,d]) + T(f, [d,e])$$

が成り立つ。

(4) 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して、$T(f, [a, \cdot])$ を $[a,b]$ から $\mathbb{R}$ への関数と考える時、連続関数となっている。

即ち、上記の 4 番目の条件を緩めたものを考えてみたい。

3. 積分の拡張

$f(x)=\sec^2 x$ を考えてみる。$F(x)=\tan x$ とすると $F'=f$ が成り立っているので、f の積分を F と考えたくなる。しかし、これは F が区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$ $(n\in\mathbb{Z})$ でしか連続でない為、成り立たない。しかも、Henstock-Kurzweil 主値積分でも不可能である。これより、更に拡張の余地があるのではないかと思われる。

F が f の不定積分であるとは、$[a,x]\in\mathcal{I}$ である任意の x に対して

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx+F(a)$$

が成り立つことである。G が f の拡張された原始関数であるとは、$G'=f$ a.e. が成り立つことと定義する。

通常の積分（Lebesgue 積分や Henstock-Kurzweil 積分）及び Henstock-Kurzweil 主値積分でも、f が積分可能ならば、$G=F$ は原始関数の一つである。即ち、原始関数は不定積分を包含すると考えて良い。そこで、（面積の拡張概念としての積分とは相容れなくなる部分もあるが）不定積分が原始関数に何処まで近付けられるのかについて考えてみる。

T を $\mathcal{F}\times\mathcal{I}$ から $\mathbb{R}$ への積分（又は主値積分）、$\mathcal{F}^*$ を $\mathcal{F}$ を含む線型な関数空間、

$$\mathcal{N}_f \overset{\text{def}}{=} \left\{ z\in D \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ is not } T\text{-integrable on any } I\in\mathcal{I} \\ \text{satisfying } z\in I \end{array} \right\}$$

とする。任意の $f\in\mathcal{F}^*$ に対して、$\mathcal{N}_f$ は closed null set であることを仮定する。$\{(a_p,b_p)\mid p\in\mathbb{N}\}$ を $D^\circ\setminus\mathcal{N}_f$ の総てのコンポーネントの集合とする。

$$\mathcal{I}_f \overset{\text{def}}{=} \{[a,b]\mid \exists p\in\mathbb{N}, [a,b]\subset(a_p,b_p)\}$$

とする。このとき、任意の $f\in\mathcal{F}^*$ 及び $I\in\mathcal{I}_f$ に対して、$T^*(f,I)=T(f,I)$ によって T^* を定義する。このようにすることで、以下の結果を得る。

Theorem 3.1 (積分の拡張). T^* を D 上の積分 T の拡張とする。このとき、f が $I\in\mathcal{I}_f$ 上で T-積分可能であれば、f は $I\in\mathcal{I}_f$ 上で T^*-積分可能である。

Theorem 3.2 (線型性). T^* を D 上の積分 T の拡張、$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$、$f,g\in\mathcal{F}^*$、$I\in\mathcal{I}_f\cap\mathcal{I}_g$ とする。このとき、以下が成り立つ。$\Longrightarrow$

$$T^*(\lambda f+\mu g, I)=\lambda T^*(f,I)+\mu T^*(g,I)$$

Theorem 3.3 (区間の加法性). T^* を D 上の積分 T の拡張、$f\in\mathcal{F}^*$、$I_1,I_2\in\mathcal{I}_f$、$I_1\cup I_2\in\mathcal{I}$、$I_1^\circ\cap I_2^\circ=\emptyset$ とする。このとき、以下が成り立つ。$\Longrightarrow$

$$T^*(f,I_1)+T^*(f,I_2)=T^*(f,I_1\cup I_2)$$

通常、閉区間 $[a,b]$ は $a\le b$ を満たす。然し乍ら、b を変数と考えたい時 $a>b$ の場合も考えておきたい。よく用いられている様に、$a>b$ ならば $T^*(f,[a,b])=-T^*(f,[b,a])$ と定義する。更に、$a>b$ の場合も、もし $[b,a]\in\mathcal{I}_f$ ならば $[a,b]\in\mathcal{I}_f$ であると考える。

Theorem 3.4 (連続性)**.** T^* を D 上の積分 T の拡張、$f \in \mathcal{F}^*$、$\{(a_p, b_p) \mid p \in \mathbb{N}\}$ を $D^\circ \setminus \mathcal{N}_f$ の総てのコンポーネントの集合、$c_p \in (a_p, b_p)$、$[c_p, x] \in \mathcal{I}_f$ とする。このとき、$T^*(f, [c_p, x])$ は x に関して $D^\circ \setminus \mathcal{N}_f$ 上で連続である。

4. 簡単な応用例

次のような初期値問題を考える。

$$\begin{cases} u'(t) = 1 + u(t)^2, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

従来、これは次のようにして解くことが可能である。

$$\int_{[c,t]} \frac{u'(s)}{1+u(s)^2} ds = \int_{[c,t]} ds$$

置換積分によって

$$\int_{[c,t]} \frac{u'(s)}{1+u(s)^2} ds = \int_{[u(c),u(t)]} \frac{dv}{1+v^2} = \arctan u(t) - \arctan u(c)$$

であるから

$$\arctan u(t) - \arctan u(c) = t - c$$

を得る。故に、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$u(t) = \tan(t - c + \arctan u(c)),\ t \in \left(\frac{\pi(2n-1)}{2}, \frac{\pi(2n+1)}{2} \right)$$

を得る。初期値 $u(0) = 0$ より

$$0 = u(0) = \tan(-c + \arctan u(c))$$

であるから、任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$-c + \arctan u(c) = \pi m$$

を得る。故に、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$u(t) = \tan(t + \pi m) = \tan t,\ t \in \left(\frac{\pi(2n-1)}{2}, \frac{\pi(2n+1)}{2} \right)$$

を得る。u の定義域は 0 を含んでいなければいけないし、また u は $-\dfrac{\pi}{2}$ 及び $\dfrac{\pi}{2}$ で爆発しているので、$n = 0$ でなければならない。即ち、

$$u(t) = \tan t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

が解である。解はこれ以上延長は出来ない。

次に、拡張された積分で同じ問題を解いてみる。

$$\mathcal{N}_f = \left\{ \frac{\pi(2n+1)}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

とする。このとき

$$\mathcal{I}_f = \left\{ [a,b] \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{Z}, [a,b] \subset \left(\frac{\pi(2n-1)}{2}, \frac{\pi(2n+1)}{2} \right) \right\}.$$

である。任意の $[c,t] \in \mathcal{I}_f$ に対して

$$(HK)^* \int_{[c,t]} \frac{u'(s)}{1+u(s)^2} ds = (HK)^* \int_{[c,t]} ds$$

通常の積分の場合と同様に、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$u(t) = \tan(t - c + \arctan u(c)),\ [c,t] \subset \left(\frac{\pi(2n-1)}{2}, \frac{\pi(2n+1)}{2} \right)$$

を得る。$c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ の場合、$u(0) = 0$ より

$$0 = u(0) = \tan(-c + \arctan u(c))$$

を得る。これより

$$-c + \arctan u(c) = 0$$

を得る。故に

$$u(t) = \tan t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

を得る。一般に、$c \in \left(\frac{\pi(2n-1)}{2}, \frac{\pi(2n+1)}{2} \right)$ の場合、u は $\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}, \frac{\pi(2n+1)}{2} \right)$ で連続であるから

$$-c + \arctan u(c) = \pi n$$

を得る。故に、

$$u(t) = \tan(t + \pi n) = \tan t,\ t \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi(2n-1)}{2}, \frac{\pi(2n+1)}{2} \right)$$

を得る。拡張された積分を用いれば、解の爆発は考慮する必要がなく n は任意で構わない。

References

[1] B. Bongiorno, *Un nuovo integrale per il problema della primitive*, Le Matematiche **51** (1996), 299–313.

[2] ———, *On the C-integral*, AMS Special Session on Nonabsolute Integration (University of Toronto, Toronto, September, 2000).

[3] B. Bongiorno, L. Di Piazza, and D. Preiss, *A constructive minimal integral which includes Lebesgue integrable functions and derivatives*, Journal of the London Mathematical Society **62** (2000), 117–126.

[4] D. Bongiorno, *On the problem of nearly derivatives*, Scientiae Mathematicae Japonicae **e-2004** (2004), 275–287.

[5] ———, *Riemann-type definition of improper integrals*, Czechoslovak Mathematical Journal **54** (2004), 717–725.

[6] A. M. Bruckner, R. J. Freissner, and J. Foran, *The minimal integral which includes Lebesgue integrable functions and derivatives*, Coll. Math. **50** (1986), 289–293.

[7] R. A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, American Mathematical Society, Providence, 1994.

[8] R. Henstock, *The general theory of integration*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[9] T. Kawasaki, *Criteria for the $\tilde{C}$-integral*, Scientiae Mathematicae Japonicae **e-2015** (2015), 11 pages.

[10] ———, *Some integrals between the Lebesgue integral and the Denjoy integral*, Scientiae Mathematicae Japonicae **e-2016** (2016), 25 pages.

[11] ———, *An extension of integrals*, submitted.

[12] T. Kawasaki and I. Suzuki, *Criteria for the C-integral*, Scientiae Mathematicae Japonicae **e-2015** (2015), 10 pages.

[13] 久保田陽人, 積分論, 槙書店, 東京, 1977.

[14] S. Nakanishi (formerly S. Enomoto), *Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions, I*, Osaka Mathematical Journal **7** (1955), 59–102.

[15] ———, *Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions, II*, Osaka Mathematical Journal **7** (1955), 157–178.

[16] S. Nakanishi, *The Denjoy integrals defined as the completion of simple functions*, Mathematica Japonica **37** (1992), 89–101.

[17] ———, *A new definition of the Denjoy's special integral by the method of successive approximation*, Mathematica Japonica **41** (1995), 217–230.

[18] W. F. Pfeffer, *The Riemann approach to integration*, Cambridge University Press, Oxford, 1993.

[19] S. Saks, *Theory of the integral*, Warsaw, 1937.

[20] E. Talvila, *The distributional Denjoy integral*, Real Analysis Exchange **33** (2007/2008), 51–82.

弱い正則条件の下での双線形フーリエ乗子作用素の有界性について

大阪大学理学研究科数学専攻　至田直人

本研究は宮地晶彦氏（東京女子大学），冨田直人氏（大阪大学）との共同研究に基づくものである．

1　はじめに

$m \in L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ に対して，双線形フーリエマルチプライヤー作用素 T_m は以下で定義される．

$$T_m(f,g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} e^{ix\cdot(\xi+\eta)} m(\xi,\eta) \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta) d\xi d\eta$$

定義 1. T_m が $X \times Y \to Z$ 有界であるとは，ある $C > 0$ が存在して

$$\|T_m(f,g)\|_Z \le C\|f\|_X\|g\|_Y \quad (f \in X \cap \mathcal{S},\, g \in Y \cap \mathcal{S}) \tag{1}$$

が成り立つことをいう． 作用素ノルム $\|T_m\|_{X\times Y\to Z}$ を (**??**) の右辺における C の下限と定義する．

これ以降，p, p_1, p_2 はすべて $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$ を満たすものとする．以下の定理は基本的である．

定理 1 ([**?**, **?**, **?**]). $1 \le p, p_1, p_2 \le \infty$ とする．$m \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus \{(0,0)\})$ が

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta m(\xi,\eta)| \le C_{\alpha,\beta}\,(|\xi|+|\eta|)^{-(|\alpha|+|\beta|)} \quad (\forall \alpha,\beta \in \mathbf{N}_0^n) \tag{2}$$

を満たすならば，T_m は $L^{p_1} \times L^{p_2} \to L^p$ 有界である．ただし，

$$p_1 = 1 \text{ or } p_2 = 1 \Longrightarrow L^{p_1} \times L^{p_2} \to L^{p,\infty}$$
$$p = p_1 = p_2 = \infty \Longrightarrow L^\infty \times L^\infty \to BMO$$

にそれぞれ置き換えて有界性が成立する．

さらに，マルチプライヤー m に消失条件を仮定することでハーディ空間 H^p 上での有界性が成り立つことが知られている．

定理 2 ([2])**.** $n/(n+1) < p, p_1, p_2 < \infty$ とする．$m \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \backslash \{(0,0)\})$ は (2) を満たすものとする．さらに

$$m(\xi, -\xi) = 0 \quad (\xi \neq 0)$$

を満たすならば，T_m は $H^{p_1} \times H^{p_2} \to H^p$ 有界である．

[3] において，$0 < p, p_1, p_2 < \infty$ に対して，T_m が $H^{p_1} \times H^{p_2} \to H^p$ 有界となるための消失条件に関する必要十分条件について考察されている．

次に m に滑らかさの制限を加えた場合について考える．$\Psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ は

$$\operatorname{supp}\Psi \subset \{\xi \in \mathbf{R}^d : 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}, \quad \sum_{j \in \mathbf{Z}} \Psi(\zeta/2^j) = 1 \ (\zeta \neq 0)$$

を満たすものとする．$m \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$, $j \in \mathbf{Z}$ に対して，

$$m_j(\zeta) = m(2^j\zeta)\Psi(\zeta)$$

とおく．

まず，双線形の場合の Hörmander 型の定理について紹介する．

定理 3 ([8])**.** $1 < p, p_1, p_2 < \infty$ は $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$ を満たすものとする．$s > n$ ならば

$$\|T_m\|_{L^p \times L^q \to L^r} \lesssim \sup_{j \in \mathbf{Z}} \|m_j\|_{W^s(\mathbf{R}^{2n})} \tag{3}$$

が成り立つ．ここで $W^s(\mathbf{R}^{2n})$ は通常の意味でのソボレフ空間を表す．

$p \leq 1$ の場合については，Grafakos-Si [4] で扱われている．また，マルチプライヤー m は

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta m(\xi, \eta)| \leq C_{\alpha,\beta} \left(|\xi| + |\eta|\right)^{-(|\alpha|+|\beta|)} \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^n,\ |\alpha| + |\beta| \leq n+1)$$

を満たすならば，$n < s \leq n+1$ に対して，

$$\sup_{j \in \mathbf{Z}} \|m_j\|_{W^s} < \infty$$

を満たす．よって**定理 3** は**定理 1** を正則性の観点から改良を与えていることがわかる．

次に，ソボレフ空間の代わりに積型ソボレフ空間を用いた結果について紹介する．

定義 2. $s_1, s_2 \in \mathbf{R}$ とする．積型ソボレフ空間 $W^{(s_1,s_2)}$ を

$$W^{(s_1,s_2)}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) = \left\{ F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) : \|F\|_{W^{(s_1,s_2)}} = \|\langle D_\xi \rangle^{s_1} \langle D_\eta \rangle^{s_2} F(\xi, \eta)\|_{L^2_{\xi,\eta}} < \infty \right\}$$

と定義する．ここで，

$$\langle D_\xi \rangle^{s_1} \langle D_\eta \rangle^{s_2} F(\xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i(x \cdot \xi + y \cdot \eta)} (1 + |x|^2)^{s_1/2} (1 + |y|^2)^{s_2/2} \widehat{F}(x, y)\, dx dy$$

と定める．

定理 4 ([7])**.** $0 < p, p_1, p_2 \leq \infty$ は $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$ を満たすものとする．このとき，

$$s_1 > \max(n/2, n/p_1 - n/2),\ s_2 > \max(n/2, n/p_2 - n/2),$$
$$s_1 + s_2 > n/p_1 + n/p_2 - n/2$$

ならば

$$\|T_m\|_{H^{p_1}\times H^{p_2}\to L^p} \lesssim \sup_{j\in\mathbf{Z}} \|m_j\|_{W^{(s_1,s_2)}}$$

が成り立つ．

$s_1, s_2 > n/2$ に対して，

$$\|F\|_{W^{(s_1,s_2)}} \lesssim \|F\|_{W^{s_1+s_2}}$$

が成立する．このことから**定理 4** は **定理 3** を含むものと考えられる．

2 主結果

まず，以下のノルムを定義する．

定義 3. $s_1,\ s_2 \in \mathbf{R}$ とする．

$$W_1^{(s_1,s_2)} = \left\{ F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) \,:\, \|F\|_{W_1^{(s_1,s_2)}} = \left\| \|\langle D_\xi\rangle^{s_1} \langle D_\eta\rangle^{s_2} F(\xi,\eta)\|_{L^2_\xi} \right\|_{L^\infty_\eta} < \infty \right\}$$
$$W_2^{(s_1,s_2)} = \left\{ F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) \,:\, \|F\|_{W_1^{(s_1,s_2)}} = \left\| \|\langle D_\xi\rangle^{s_1} \langle D_\eta\rangle^{s_2} F(\xi,\eta)\|_{L^2_\eta} \right\|_{L^\infty_\xi} < \infty \right\}$$

と定義する．

我々はこれまでの結果を部分的に改良することができた．以下 $W_2^{(s_1,s_2)}$ ノルムでのみ結果を述べるが，$W_1^{(s_1,s_2)}$ ノルムについても同様である．

定理 5. $s_1 > 0$，$s_2 > n/2$ とする．このとき，

$$\|T_m\|_{L^2\times L^\infty\to L^2} + \|T_m\|_{L^2\times L^2\to L^1} \lesssim \sup_{j\in\mathbf{Z}} \|m_j\|_{W_2^{(s_1,s_2)}} \tag{4}$$

が成り立つ．

$s_1,\ s_2 > n/2$ に対して，十分小さな $\tilde{s}_1 > 0$ をとると，

$$\|F\|_{W^{(\tilde{s}_1,s_2)}} \lesssim \|F\|_{W^{(s_1,s_2)}}$$

が成り立つ．このことから**定理 5** は**定理 4** の $(p_1,p_2) = (2,\infty)$, $(2,2)$ の場合の改良となっていることがわかる．

さらに今回は m に消失条件を仮定することで以下の結果を得ることもできた．

定理 6. $s_1 > 0,\, s_2 > n/2$ とする．このとき

$$m(\xi, 0) = 0 \quad (\xi \neq 0)$$

を満たすならば，

$$\|T_m\|_{L^2 \times BMO \to L^2} \lesssim \sup_{j \in \mathbf{Z}} \|m_j\|_{W_2^{(s_1, s_2)}}$$

が成り立つ．また，

$$m(\xi, -\xi) = 0 \quad (\xi \neq 0)$$

を満たすならば，

$$\|T_m\|_{L^2 \times L^2 \to H^1} \lesssim \sup_{j \in \mathbf{Z}} \|m_j\|_{W_2^{(s_1, s_2)}}$$

が成り立つ．

マルチプライヤー m が

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta m(\xi, \eta)| \leq C_{\alpha,\beta} \left(|\xi| + |\eta|\right)^{-(|\alpha| + |\beta|)} \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^n,\ |\alpha| \leq 1,\ |\beta| \leq [n/2] + 1)$$

を満たすならば，$0 < s_1 \leq 1,\ n/2 < s_2 \leq [n/2] + 1$ に対して

$$\sup_{j \in \mathbf{Z}} \|m_j\|_{W_2^{(s_1, s_2)}} < \infty$$

であることがわかる．ここで $x \in \mathbf{R}$ に対して，$[x]$ は x の整数部分を表すものとする．したがって**定理 6** の後半はマルチプライヤーの正則性の観点からみれば，**定理 2** の $(p_1, p_2) = (2, 2)$ の場合の改良となっている．

3 双対性を用いた議論

$W_2^{(s_1, s_2)}$ ノルムの有用な性質について紹介する．$W_1^{(s_1, s_2)}$ ノルムについても同様である．$m^{*2}(\xi, \eta) = m(\xi, -\xi - \eta)$ とおく．任意の $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ に対して，

$$\int_{\mathbf{R}^n} T_m(f, g)(x) h(x) dx = \int_{\mathbf{R}^n} T_{m^{*2}}(f, h)(x) g(x) dx$$

より，

$$\|T_m\|_{L^p \times L^q \to L^r} = \|T_{m^{*2}}\|_{L^p \times L^{r'} \to L^{q'}} \tag{5}$$

が成り立つ．

$s_1 > 0,\, s_2 > n/2$ に対して $\tilde{s}_1 > 0,\, \tilde{s}_2 > n/2$ をうまく選ぶと，

$$\|m^{*2}\|_{W_2^{(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)}} \lesssim \|m\|_{W_2^{(s_1, s_2)}} \qquad (m \in L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)) \tag{6}$$

が成立する．よって (5), (6) の関係から，$L^2 \times L^\infty \to L^2$ 有界性，$L^2 \times BMO \to L^2$ を示すことで，$L^2 \times L^2 \to L^1$ 有界性，$L^2 \times L^2 \to H^1$ 有界性を証明できることがわかる．

しかし不等式 (6) は積型のソボレフノルムでは成り立たない性質であったため，今回考えた $W_2^{(s_1, s_2)}$ ノルムの有効な点である．

参考文献

[1] R.R. Coifman, Y. Meyer, Au delá des opérateurs pseudo-difféntiels, Astérisque **57** (1978), 1-185.

[2] R.R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes, Compensated compactness and Hardy spaces, J. Math. Pures Appl. **72** (1993), 247 - 286.

[3] L. Grafakos, S. Nakamura, H.V. Nguyen, Y. Sawano, Multiplier conditions for boundness into Hardy spaces, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), to appear.

[4] L. Grafakos, Z. Si, The Hörmander multiplier theorem for multilinear operators, J. Reine Angew. Math. **668** (2012), 133 -147.

[5] L. Grafakos, R. Torres, Multilinear Calderón-Zygmund theory, Adv. Math. **165** (2002), 124-164.

[6] C. Kenig, E. M. Stein, Multilinear estimates and fractional integration, Math. Res. Lett. **6** (1999), 1-15.

[7] A. Miyachi, N. Tomita, Minimal smoothness conditions for bilinear Fourier multipliers, Rev. Mat. Iberoam. **29** (2013), 495-530.

[8] N. Tomita, A Hörmander type multiplier theorem for multilinear operators. J. Funct. Anal. **259** (2010), 2028-2044.

Local Muckenhoupt class for variable exponents

Tokyo Metropolitan University
Toru Nogayama and Yoshihiro Sawano

Abstract

In this report, we define $A^{\mathrm{loc}}_{p(\cdot)}$ and show that the weighted inequality for local Hardy–Littlewood maximal operator on the Lebesgue spaces with variable exponent. This work will extend the theory of Rychkov, who developed the theory of A^{loc}_p weights. Due to the setting of variable exponents, a new method of extension of weights will be needed; the extension method is different from the one by Rychkov.

1 Introduction

1.1 Local Muckenhoupt class

We recall that Rychkov established the theory of local Muckenhoupt class [5]. For $1 < p < \infty$, w is called an A^{loc}_p weight if

$$[w]_{A^{\mathrm{loc}}_p} \equiv \sup_{|Q|\le 1} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{p-1} < \infty,$$

where the supremum is taken over all cubes $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Rychkov gave a method of creating global weights from a given local weight.

Lemma 1.1. [5, Lemma 1.1] *Let $1 < p < \infty$ and $w \in A^{\mathrm{loc}}_p$. Let I be a cube with $|I| = 1$. Then, there exists a weight $\overline{w} \in A_p$ so that $\bar{w} = w$ on I and*

$$[\overline{w}]_{A_p} \le C[w]_{A^{\mathrm{loc}}_p},$$

where the constant C is independent of I.

1.2 Variable Lebesgue spaces

We use the following notation of variable exponents. Let $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ be a measurable function, and let w be a weight, that is, a measurable function which is positive almost everywhere. Then, we define the weighted variable Lebesgue space $L^{p(\cdot)}(w)$ to be the set of all measurable functions f such that for some $\lambda > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} w(x)\mathrm{d}x < \infty.$$

For $f \in L^{p(\cdot)}(w)$, the norm is defined by

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \equiv \inf\left\{\lambda > 0 \,:\, \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} w(x)\mathrm{d}x \le 1\right\}.$$

If $w \equiv 1$, we write $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(1)} = \|\cdot\|_{p(\cdot)}$ and $L^{p(\cdot)}(1) = L^{p(\cdot)}$, and we have the ordinary variable Lebesgue space $L^{p(\cdot)}$.

Note that the definition of $L^{p(\cdot)}(w)$ slightly differs from the one in [2], where the authors considered the theory of Muckenhoupt weights for the Hardy–Littlewood maximal operator M. When we investigate the boundedness of the maximal operator M on the varable Lebesgue spaces, the following two conditions seem standard.

(1) The local log-Hölder continuity condition:

$$LH_0 \,:\, |p(x) - p(y)| \le \frac{C}{-\log|x-y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |x-y| \le \frac{1}{2}, \tag{1.1}$$

(2) The log-Hölder continuity condition at infinity: there exists $p_\infty \in [0, \infty)$ such that

$$LH_\infty \,:\, |p(x) - p_\infty| \le \frac{C}{\log(e + |x|)}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Using a different method from [5], we seek to establish that the local analogue of the result in [2] is available; we consider the local maximal operator given by

$$M^{\mathrm{loc}} f(x) \equiv \sup_{Q \in \mathcal{Q}, |Q| \le 1} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|} \int_Q |f(y)|\mathrm{d}y \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

for a measurable function f.

2 $A^{\mathrm{loc}}_{p(\cdot)}$ weights

We will mix the notions considered in [2, 5] to define the local Muckenhoupt class as follows:

Definition 2.1. Given an exponent $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ and a weight w, we say that $w \in A^{\rm loc}_{p(\cdot)}$ if $[w]_{A^{\rm loc}_{p(\cdot)}} \equiv \sup\limits_{|Q|\le 1} |Q|^{-1}\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\|\chi_Q\|_{L^{p'(\cdot)}(\sigma)} < \infty$, where $\sigma \equiv w^{-\frac{1}{p(\cdot)-1}}$ and the supremum is taken over all cubes $Q \in \mathcal{Q}$. Here $\mathcal{Q}$ denotes the set of all cubes whose edges are parallel to coordinate axes.

If $p(\cdot) \equiv p$ is a constant exponent, then $A^{\rm loc}_{p(\cdot)}$ coincides with the class $A^{\rm loc}_p$ defined in [5].

Next, we will consider the extension of this local weight as Rychkov did. However, we can not use the technique by Rychkov [5] directly. To simplify the matters, we work in $\mathbb{R}$. In [5], Rychkov considered a symmetric extension of weights. More precisely, given an interval I and a weight w on I, Rychkov defined a weight w_I on an interval J adjacent to I mirror-symmetrically with respect to the contact point in $I \cap J$. We repeat this procedure to define a weight w_I on $\mathbb{R}$. We can not employ this method since we can not extend the variable exponents mirror-symmetrically.

To overcome these issues, we will need two devices. One device is well known. We will fix a dyadic grid $\mathcal{D}_{k,\mathbf{a}}$, $k \in \mathbb{Z}$ and $\mathbf{a} \in \{0,1,2\}^n$. More precisely, let

$$\mathcal{D}^0_{k,a} := \begin{cases} \{[3m\cdot 2^k + a - 2^{k+1}, 3m\cdot 2^k + a + 2^k) \,:\, m \in \mathbb{Z}\} & (k \text{ is even}) \\ \{[3m\cdot 2^k + a - 2^{k}, 3m\cdot 2^k + a + 2^{k+1}) \,:\, m \in \mathbb{Z}\} & (k \text{ is odd}) \end{cases}$$

for $k \in \mathbb{Z}$ and $a = 0,1,2$. Moreover, we put

$$\mathcal{D}_{k,\mathbf{a}} := \{Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_n \,:\, Q_j \in \mathcal{D}^0_{k,a_j}\}$$

for $k \in \mathbb{Z}$ and $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \{0,1,2\}^n$. Then we set

$$\mathcal{D}_{\mathbf{a}} := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_{k,\mathbf{a}} \,:\, \text{dyadic grid for } \mathbf{a} \in \{0,1,2\}^n.$$

Here and below, let $\mathfrak{D}$ be a dyadic grid.

The second device is a new local/global strategy.

Definition 2.2. Let $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ be a variable exponent and w be a weight. Then, w belongs to $A^{\rm loc}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D})$ if

$$[w]_{A^{\rm loc}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D})} \equiv \sup_{Q\in\mathfrak{D}, |Q|\le 3^n} |Q|^{-1}\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\|\chi_Q\|_{L^{p'(\cdot)}(\sigma)} < \infty,$$

and w belongs to $A_{p(\cdot)}(\mathfrak{D})$ if

$$[w]_{A_{p(\cdot)}(\mathfrak{D})} \equiv \sup_{Q\in\mathfrak{D}} |Q|^{-1}\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\|\chi_Q\|_{L^{p'(\cdot)}(\sigma)} < \infty,$$

where $\sigma \equiv w^{-\frac{1}{p(\cdot)-1}}$.

The next lemma is important. As we have said, Rychkov extended a local weight mirror-symmetrically. However, in the setting of variable exponent, this way is no longer available. So we propose the different extension.

Lemma 2.3. *Let $w \in A_{p(\cdot)}^{\rm loc}(\mathfrak{D})$. Let $I \in \mathfrak{D}$ be a cube with $|I| = 1$. Define*

$$\overline{w}(x) = \begin{cases} (\|\chi_I\|_{L^{p(\cdot)}(w)})^{p(x)} & (x \in \mathbb{R}^n \setminus I) \\ w(x) & (x \in I). \end{cases}$$

Then $\overline{w} \in A_{p(\cdot)}(\mathfrak{D})$ and $[\overline{w}]_{A_{p(\cdot)}(\mathfrak{D})} \lesssim [w]_{A_{p(\cdot)}^{\rm loc}(\mathfrak{D})}$.

3 Main theorems

The followings are our main theorems.

Theorem 3.1. *Let $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ satisfy conditions* (1.1) *and* (1.2) *and* $1 < p_- \equiv {\rm essinf}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) \le p_+ \equiv {\rm esssup}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) < \infty$. *Then given any $w \in A_{p(\cdot)}^{\rm loc}$,*

$$\|M^{\rm loc} f\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(w)}.$$

In analogy to Theorem 3.1, we can prove the following theorems:

Theorem 3.2. *Let $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ satisfy conditions* (1.1) *and* (1.2). *If $1 < p_- \le p_+ < \infty$, then given any $w \in A_{p(\cdot)}^{\rm loc}(\mathfrak{D})$,*

$$\|M_{\mathfrak{D}}^{\rm loc} f\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(w)},$$

where

$$M_{\mathfrak{D}}^{\rm loc} f(x) \equiv \sup_{Q \in \mathfrak{D}, |Q| \le 3^n} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|} \int_Q |f(y)| {\rm d}y \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Theorem 3.3. *Let $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ satisfy conditions* (1.1) *and* (1.2). *If $1 < p_- \le p_+ < \infty$, then given any $w \in A_{p(\cdot)}(\mathfrak{D})$, there exists a constant $C > 0$ such that*

$$\|M_{\mathfrak{D}} f\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(w)}$$

for any measurable function f,where

$$M_{\mathfrak{D}} f(x) \equiv \sup_{Q \in \mathfrak{D}} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|} \int_Q |f(y)| {\rm d}y \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Theorem 3.1 will have been proved once we prove Theorem 3.2, whose proof uses Theorem 3.3. We note that unlike the proof of Theorem 3.1, the one of Theorem 3.3 is an analogue of [2, Theorem 1.1].

4 Application

Finally, as an application of our results, we will prove the Rubio de Francia extrapolation theorem in our setting of weights. Furthermore, using this theorem, we obtain the weighted vector-valued maximal inequality. The theory of extrapolation is a powerful tool in harmonic analysis to extend many results starting from a weighted inequality. Cruz-Uribe and Wang [3] and Ho [4] extended the extrapolation theorem on weighted Lebesgue spaces with variable exponent, respectively. We can show the extrapolation theorem for $A^{\mathrm{loc}}_{p(\cdot)}$ by applying the boundedness of the local maximal operator.

Theorem 4.1. *Suppose that for some* $p_0, 1 < p_0 < \infty$*, and every* $w_0 \in A^{\mathrm{loc}}_{p_0}$*,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{p_0} w_0(x) \mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p_0} w_0(x) \mathrm{d}x$$

for pairs of functions (f, g) *contained in some family* $\mathcal{F}$ *of non-negative measurable functions. Let* $p(\cdot)$ *satisfy conditions* (1.1) *and* (1.2) *and* $1 < p_- \leq p_+ < \infty$*, and* $w \in A^{\mathrm{loc}}_{p(\cdot)}$*. Then,*

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \leq C \|g\|_{L^{p(\cdot)}(w)}$$

for $(f, g) \in \mathcal{F}$*.*

Rychkov [5, Lemma 2.11] proved the weighted vector-valued inequality for M^{loc} and $w \in A^{\mathrm{loc}}_p$ as an extension of the results in [1].

Proposition 4.2. *Let* $1 < p < \infty, 1 < q \leq \infty$*, and* $w \in A^{\mathrm{loc}}_p$*. Then for any sequence of measurable functins* $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$*, we have*

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left[M^{\mathrm{loc}} f_j \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(w)}.$$

We recall that Cruz-Uribe et al. extended the same result by Anderson and John [1] to variable Lebesgue spaces.

Proposition 4.3. *Suppose that* $p(\cdot)$ *satisfy conditions* (1.1) *and* (1.2) *as well as* $1 < p_- \leq p_+ < \infty$*, and let* $w \in A_{p(\cdot)}$ *and* $1 < q \leq \infty$*. Then for any sequence of measurable functins* $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$*, we have*

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} [M f_k]^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \leq C \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^{p(\cdot)}(w)}. \tag{4.1}$$

The following theorem is the weighted vector-valued inequality for the local variable weight.

Theorem 4.4. *Suppose that* $p(\cdot)$ *satisfy conditions* (1.1) *and* (1.2) *as well as* $1 < p_- \leq p_+ < \infty$*, and let* $w \in A_{p(\cdot)}$ *and* $1 < q \leq \infty$*. Then for any sequence of measurable functins* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$*, we have*

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left[M^{\mathrm{loc}} f_k \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \leq C \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^{p(\cdot)}(w)} . \tag{4.2}$$

References

[1] K.F. Andersen and R.T. John, *Weighted inequalities for vecter-valued maximal functions and singular integrals*, Studia Math., **69** (1980), 19–31.

[2] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, C. J. Neugebaucer, *Weighted norm inequalities for the maximal operator on variable Lebesgue spaces*, J. Math. Anal. Appl. **394** (2012), 744–760.

[3] D. Cruz-Uribe, L.-A. Wang, *Extrapolation and weighted norm inequalities in the variable Lebesgue spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 2, 1205–1235.

[4] K.-P. Ho, *Singular integral operators, John–Nirenberginequalities and Triebel–Lizorkin type spaces on weighted Lebesgue spaces with variable exponets*, Rev. Un. Mat. Argentina, Vol. 57, No. 1 (2016), 85–101.

[5] V. S. Rychkov, *Littlewood–Paley theory and function spaces with* A_p^{loc} *weights,* Math. Nachr. **224** (2001), 145–180.

Commutators on Orlicz-Morrey spaces

Minglei Shi, Ryutaro Arai and Eiichi Nakai (Ibaraki University)

1 Introduction

This is an announcement of [14].

Let $\mathbb{R}^n$ be the n-dimensional Euclidean space. Let $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ and T be a Calderón-Zygmund singular integral operator. In 1976 Coifman, Rochberg and Weiss [3] proved that the commutator $[b, T] = bT - Tb$ is bounded on $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$, that is,

$$\|[b, T]f\|_{L^p} = \|bTf - T(bf)\|_{L^p} \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{L^p},$$

where C is a positive constant independent of b and f. For the fractional integral operator I_α, Chanillo [2] proved the boundedness of $[b, I_\alpha]$ in 1982. Coifman, Rochberg and Weiss [3] and Chanillo [2] also gave the necessary conditions for the boundedness. These results were extended to Orlicz spaces by Janson [6] (1978) and Fu, Yang and Yuan [4, 5] (2012, 2014).

In this report we discuss the commutators $[b, T]$ and $[b, I_\rho]$ on Orlicz-Morrey spaces, where T is a Calderón-Zygmund operator, I_ρ is a generalized fractional integral operator and b is a function in generalized Campanato spaces.

First we recall the definition of Calderón-Zygmund operators following [15]. Let Ω be the set of all nonnegative nondecreasing functions ω on $(0, \infty)$ such that $\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty$.

Definition 1.1 (standard kernel)**.** Let $\omega \in \Omega$. A continuous function $K(x, y)$ on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x, x) \in \mathbb{R}^{2n}\}$ is said to be a standard kernel of type ω if the following conditions are satisfied:

$$|K(x, y)| \le \frac{C}{|x - y|^n} \quad \text{for} \quad x \ne y, \tag{1.1}$$

$$|K(x, y) - K(x, z)| + |K(y, x) - K(z, x)| \le \frac{C}{|x - y|^n}\, \omega\left(\frac{|y - z|}{|x - y|}\right) \quad \text{for} \quad 2|y - z| \le |x - y|. \tag{1.2}$$

実解析学シンポジウム 2019 報告集
石 明磊 (Minglei SHI) 18nd206l@vc.ibaraki.ac.jp, stfoursml@gmail.com
新井 龍太郎 (Ryutaro ARAI) 18nd201t@vc.ibaraki.ac.jp, araryu314159@gmail.com
中井 英一 (Eiichi NAKAI) eiichi.nakai.math@vc.ibaraki.ac.jp
This work was supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (B), No. 15H03621, Japan Society for the Promotion of Science.

Definition 1.2 (Calderón-Zygmund operator)**.** Let $\omega \in \Omega$. A linear operator T from $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ to $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ is said to be a Calderón-Zygmund operator of type ω, if T is bounded on $L^2(\mathbb{R}^n)$ and there exists a standard kernel K of type ω such that, for $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$,

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,dy, \quad x \notin \operatorname{supp} f. \tag{1.3}$$

It is known by [15, Theorem 2.4] that any Calderón-Zygmund operator of type $\omega \in \Omega$ is bounded on $L^p(\mathbb{R}^n)$ for $1 < p < \infty$. This result was extended to generalized Morrey spaces and Orlicz-Morrey spaces by [7, 12] (1994, 2008).

For a function $\rho : (0, \infty) \to (0, \infty)$, we consider generalized fractional integral operators I_ρ defined by

$$I_\rho f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y)\,dy,$$

where we always assume that

$$\int_0^1 \frac{\rho(t)}{t}\,dt < \infty, \tag{1.4}$$

$$\sup_{r \le t \le 2r} \rho(t) \le C \int_{K_1 r}^{K_2 r} \frac{\rho(t)}{t}\,dt \quad \text{for all } r > 0. \tag{1.5}$$

If $\rho(r) = r^\alpha$, then I_ρ is the usual fractional integral operator I_α. It is known as the Hardy-Littlewood-Sobolev theorem that I_α is bounded from $L^p(\mathbb{R}^n)$ to $L^q(\mathbb{R}^n)$, if $\alpha \in (0, n)$, $p, q \in (1, \infty)$ and $-n/p + \alpha = -n/q$. By using I_ρ, this boundedness was extended to Orlicz spaces and Orlicz-Morrey spaces by Nakai [8, 9, 10, 11] (2000, 2001, 2004, 2008).

For functions b in Campanato spaces, the boundedness of the commutators $[b, T]$ and $[b, I_\rho]$ on generalized Morrey spaces are given by Arai and Nakai [1] (2018), and the boundedness of the commutators $[b, T]$ and $[b, I_\rho]$ on Orlicz spaces are given by Janson [6] (1978) and Shi, Arai and Nakai [13] (2019).

2 Campanato and Orlicz-Morrey spaces

We say that a function $\theta : (0, \infty) \to (0, \infty)$ satisfies the doubling condition if there exists a positive constant C such that, for all $r, s \in (0, \infty)$,

$$\frac{1}{C} \le \frac{\theta(r)}{\theta(x)} \le C, \quad \text{if } \frac{1}{2} \le \frac{r}{s} \le 2. \tag{2.1}$$

We say that θ is almost increasing (resp. almost decreasing) if there exists a positive constant C such that, for all $r, s \in (0, \infty)$,

$$\theta(r) \le C\theta(s) \quad (\text{resp. } \theta(s) \le C\theta(r)), \quad \text{if } r < s. \tag{2.2}$$

In this paper we consider the following classes of φ:

Definition 2.1. (i) Let $\mathcal{G}^{\rm dec}$ be the set of all functions $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ such that φ is almost decreasing and that $r \mapsto \varphi(r)r^n$ is almost increasing.
(ii) Let $\mathcal{G}^{\rm inc}$ be the set of all functions $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ such that φ is almost increasing and that $r \mapsto \varphi(r)/r$ is almost decreasing.

If $\varphi \in \mathcal{G}^{\rm dec}$ or $\varphi \in \mathcal{G}^{\rm inc}$, then φ satisfies the doubling condition (2.1).

Definition 2.2. For $p \in [1,\infty)$ and $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, let $\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$ be the sets of all functions f such that the following functional is finite:

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{B=B(x,r)} \frac{1}{\psi(r)} \left(\fint_B |f(y) - f_B|^p \, dy \right)^{1/p},$$

where the supremum is taken over all balls $B(x,r)$ in $\mathbb{R}^n$, and

$$f_B = \fint_B f = \fint_B f(y)\, dy = \frac{1}{|B|} \int_B f(y)\, dy.$$

Then $\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)}$ is a norm modulo constant functions and thereby $\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$ is a Banach space. If $p = 1$ and $\psi \equiv 1$, then $\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. If $\psi \in \mathcal{G}^{\rm inc}$, then $\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_{1,\psi}(\mathbb{R}^n)$ with equivalent norms.

Definition 2.3. For a Young function Φ, let

$$L^\Phi(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^0(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(c|f(x)|)\, dx < \infty \text{ for some } c > 0 \right\},$$
$$\|f\|_{L^\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \le 1 \right\}.$$

Then $\|\cdot\|_{L^\Phi}$ is a norm and thereby $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ is a Banach space.

Definition 2.4. (i) A Young function Φ is said to satisfy the Δ_2-condition, denote $\Phi \in \Delta_2$, if there exists a constant $C > 0$ such that

$$\Phi(2t) \le C\Phi(t) \quad \text{for all } t > 0. \tag{2.3}$$

(ii) A Young function Φ is said to satisfy the ∇_2-condition, denote $\Phi \in \nabla_2$, if there exists a constant $k > 1$ such that

$$\Phi(t) \le \frac{1}{2k}\Phi(kt) \quad \text{for all } t > 0. \tag{2.4}$$

For a Young function Φ, a growth function $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ and a ball $B = B(z,r)$, let

$$\|f\|_{\Phi,\varphi,B} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|B|\varphi(r)} \int_B \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \le 1 \right\}.$$

Definition 2.5 (Orlicz-Morrey spaces)**.** For a Young function Φ and a growth function $\varphi \in \mathcal{G}^{\rm dec}$, let

$$L^{(\Phi,\varphi)}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{L^{(\Phi,\varphi)}} < \infty \right\},$$
$$\|f\|_{L^{(\Phi,\varphi)}} = \sup_B \|f\|_{\Phi,\varphi,B}.$$

Then $\|\cdot\|_{L^{(\Phi,\varphi)}}$ is a norm, and thereby $L^{(\Phi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ is a Banach spaces.

3 Main results

It is known that any Calderón-Zygmund operator is bounded on $L^p(\mathbb{R}^n)$ for $1 < p < \infty$. This result was extended to Orlicz-Morrey spaces $L^{(\Phi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ by Nakai (2008) as the following: Assume that

$$\int_r^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \le C\varphi(r). \tag{3.1}$$

For $f \in L^{(\Phi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$, $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$, we define Tf on each ball B by

$$Tf(x) = T(f\chi_{2B})(x) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2B} K(x,y)f(y)\,dy, \quad x \in B. \tag{3.2}$$

Then the first term in the right hand side is well defined, since $f\chi_{2B} \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$, and the integral of the second term converges absolutely. Moreover, $Tf(x)$ is independent of the choice of the ball containing x. By this definition we can show that T is a bounded operator on $L^{(\Phi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$.

For functions f in Orlicz-Morrey spaces, we define $[b,T]f$ on each ball B by

$$[b,T]f(x) = [b,T](f\chi_{2B})(x) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2B} (b(x)-b(y))K(x,y)f(y)\,dy, \quad x \in B. \tag{3.3}$$

Theorem 3.1. *Let Φ, Ψ be Young functions, $\varphi \in \mathcal{G}^{\mathrm{dec}}$ and $\psi \in \mathcal{G}^{\mathrm{inc}}$. Let T be a Calderón-Zygmund operator of type ω. Assume that φ, Φ, Ψ and ψ are satisfies a suitable relation.*

(i) *Let $\Phi, \Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$. If $b \in \mathcal{L}^{(1,\psi)}(\mathbb{R}^n)$, then $[b,T]f$ in (3.3) is well defined for all $f \in L^{(\Phi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ and there exists a positive constant C, independent of b and f, such that*

$$\|[b,T]f\|_{L^{(\Psi,\varphi)}} \le C\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(\Phi,\varphi)}}.$$

(ii) *Conversely, if T is a convolusion type such that*

$$Tf(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy \tag{3.4}$$

with homogeneous kernel $K \not\equiv 0$ satisfying $K(x) = |x|^{-n}K(x/|x|)$, $\int_{S^{n-1}} K = 0$ and $K \in C^\infty(S^{n-1})$, and if $[b,T]$ is bounded from $L^{(\Phi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ to $L^{(\Psi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$, then $b \in \mathcal{L}^{(1,\psi)}(\mathbb{R}^n)$ and there exists a positive constant C, independent of b, such that

$$\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}} \le C\|[b,T]\|_{L^{(\Phi,\varphi)} \to L^{(\Psi,\varphi)}},$$

where $\|[b,T]\|_{L^{(\Phi,\varphi)} \to L^{(\Psi,\varphi)}}$ is the opetator norm of $[b,T]$ from $L^{(\Phi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ to $L^{(\Psi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 3.2. *Let Φ, Ψ be Young functions, $\varphi \in \mathcal{G}^{\mathrm{dec}}$ and $\psi \in \mathcal{G}^{\mathrm{inc}}$. Assume that ρ satisfies* (1.4) *and* (1.5)*. Assume also that $\varphi, \Phi, \Psi, \psi$ and ρ are satisfies a suitable relation.*

(i) *Let $\Phi, \Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$. If $b \in \mathcal{L}_{1,\psi}(\mathbb{R}^n)$, then there exists a positive constant C such that, for all $f \in L^{(\Phi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|[b, I_\rho]f\|_{L^{(\Psi,\varphi)}} \le C\|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}}\|f\|_{L^{(\Phi,\varphi)}}. \tag{3.5}$$

(ii) *Conversely, if $[b, I_\alpha]$ with $0 < \alpha < n$ is bounded from $L^{(\Phi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ to $L^{(\Psi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$, then b is in $\mathcal{L}_{1,\psi}(\mathbb{R}^n)$ and there exists a positive constant C, independent of b, such that*

$$\|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} \le C\|[b, I_\alpha]\|_{L^{(\Phi,\varphi)} \to L^{(\Psi,\varphi)}}, \tag{3.6}$$

where $\|[b, I_\alpha]\|_{L^{(\Phi,\varphi)} \to L^{(\Psi,\varphi)}}$ is the operator norm of $[b, I_\alpha]$ from $L^{(\Phi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ to $L^{(\Psi,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$.

References

[1] R. Arai and E. Nakai, Commutators of Calderón-Zygmund and generalized fractional integral operators on generalized Morrey spaces, Rev. Mat. Complut. 31 (2018), No. 2, 287–331.

[2] S. Chanillo, A note on commutators, Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), no. 1, 7–16.

[3] R. R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, Ann. of Math. (2) 103 (1976), no. 3, 611–635.

[4] X. Fu, D. Yang and W. Yuan, Boundedness of multilinear commutators of Calderón-Zygmund operators on Orlicz spaces over non-homogeneous spaces, Taiwanese J. Math. 16 (2012), no. 6, 2203–2238.

[5] X. Fu, D. Yang and W. Yuan, Generalized fractional integrals and their commutators over non-homogeneous metric measure spaces, Taiwanese J. Math. 18 (2014), no. 2, 509–557.

[6] S. Janson, Mean oscillation and commutators of singular integral operators, Ark. Mat. 16 (1978), no. 2, 263–270.

[7] E. Nakai, *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces*, Math. Nachr. 166 (1994), 95–103.

[8] E. Nakai, On generalized fractional integrals in the Orlicz spaces. Proceedings of the Second ISAAC Congress, Vol. 1 (Fukuoka, 1999), 75–81, Int. Soc. Anal. Appl. Comput., 7, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[9] E. Nakai, On generalized fractional integrals, Taiwanese J. Math. 5 (2001), 587–602.

[10] E. Nakai, Generalized fractional integrals on Orlicz-Morrey spaces, Banach and Function Spaces (Kitakyushu, 2003), Yokohama Publishers, Yokohama, 2004, 323–333.

[11] E. Nakai, Orlicz-Morrey spaces and the Hardy-Littlewood maximal function, Studia Math. 188 (2008), No 3, 193–221.

[12] E. Nakai, Calderón-Zygmund operators on Orlicz-Morrey spaces and modular inequalities. Banach and function spaces II, 393–410, Yokohama Publ., Yokohama, 2008.

[13] M. Shi, R. Arai and E. Nakai, Generalized fractional integral operators and their commutators with functions in generalized Campanato spaces on Orlicz spaces, Taiwanese J. Math.

[14] M. Shi, R. Arai and E. Nakai, Commutators of Calderón-Zygmund and generalized fractional integral operators with functions in Campanato spaces on Orlicz-Morrey spaces, in preparation.

[15] K. Yabuta, *Generalizations of Calderón-Zygmund operators*, Studia Math. 82 (1985), 17–31.

The boundedness of the bilinear fractional integral operator on Morrey spaces

Chuo University Naoya Hatano
joint work with
professor Yoshihiro Sawano (Tokyo Metropolitan University)

1 Introduction

Let $0 < q \le p < \infty$. The *Morrey norm* $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ is defined by

$$\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{ f \in L^0(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup_{Q \in \mathcal{D}} |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q |f(x)|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}.$$

We recall the definition of the dyadic cubes precisely in Section 2. We handle the following bilinear operator defined by Grafakos in [2].

Definition 1.1. The *bilinear fractional integral operator of Grafakos type* $\mathcal{J}_\alpha$, $0 < \alpha < n$ is given by

$$\mathcal{J}_\alpha[f_1, f_2](x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_1(x+y) f_2(x-y)}{|y|^{n-\alpha}} \, \mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

where f_1, f_2 are integrable functions defined in $\mathbb{R}^n$.

This operator corresponds to I_α if we remove f_1 or f_2 formally, where I_α is the fractional integral operator

$$I_\alpha f(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \, \mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

for a measurable function $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$. We aim here to prove the following estimate:

Theorem 1.2 (Hatano–Sawano [5])**.** *Let $0 < \alpha < n$, $1 < q_1 \le p_1 < \infty$, $1 < q_2 \le p_2 < \infty$ and $1 \le t \le s < \infty$. Define p and q by*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}.$$

Assume that

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, \quad \frac{q}{p} = \frac{t}{s}, \quad s < \min(q_1, q_2).$$

Then for all $f_1 \in \mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)$ and $f_2 \in \mathcal{M}^{p_2}_{q_2}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\mathcal{J}_\alpha[f_1, f_2]\|_{\mathcal{M}^s_t} \lesssim \|f_1\|_{\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}} \|f_2\|_{\mathcal{M}^{p_2}_{q_2}}.$$

This theorem partially extends the following result by Kenig and Stein:

Proposition 1.3 (Kenig-Stein [9]). *Let $0 < \alpha < n$, $1 < p_j < \infty$, $0 < p < \infty$ and $0 < s < \infty$, for $j = 1, 2$. Assume that*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

Then there exists a constant C such that

$$\|\mathcal{J}_\alpha[f_1, f_2]\|_{L^s} \leq C\|f_1\|_{L^{p_1}}\|f_2\|_{L^{p_2}},$$

for all $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ and $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$.

Other conditions are investigated on Morrey spaces. He and Yan [6] gave the case $1 < q \leq p < \infty$ and $1 < t \leq s < \infty$ under the Morrey's condition $\frac{t}{s} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$. In addition, they also provided the situation $0 < t \leq s < 1$ with weights. Later, the case $0 < t \leq 1 \leq s < \min(q_1, q_2)$ is obtained by the author [4].

2 Preliminaries

For a measurable function f defined on $\mathbb{R}^n$, define the Hardy–Littlewood maximal function Mf by

$$Mf(x) \equiv \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|} \int_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

where $\mathcal{Q}$ denotes the family of all cubes with parallel to coordinate axis in $\mathbb{R}^n$. In addition, let $0 < v < \infty$. Thus the v–powered maximal function $M^{(v)}g$ is denoted by $(M[|g|^v])^{1/v}$ for a measurable function g. Let $0 < v < q \leq p < \infty$. It is known that the estimate

$$\|M^{(v)}f\|_{\mathcal{M}^p_q} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^p_q}, \quad f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$$

holds by Chiarenza and Frasca [1].

A dyadic cube is a set of the form $Q_{jk} \equiv \prod_{i=1}^{n}[2^{-j}k_i, 2^{-j}(k_i+1))$ for some $j \in \mathbb{Z}, k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. The set of all dyadic cubes is denoted by $\mathcal{D}$; $\mathcal{D} \equiv \{Q_{jk} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n\}$.

To prove Theorem 1.2, we refer the boundedness of the bilinear fractional integral operators of the other type. Let $0 < \alpha < 2n$. The bilinear fractional integral operator of Kenig–Stein type is defined by

$$\mathcal{I}_\alpha[f_1, f_2](x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{f_1(y_1)f_2(y_2)}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n-\alpha}}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

for integrable functions f_1, f_2 defined in $\mathbb{R}^n$. Thus via the pointwise estimate of this operator, the boundedness from $\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{M}^{p_2}_{q_2}(\mathbb{R}^n)$ to $\mathcal{M}^s_t(\mathbb{R}^n)$ of this operator is known by Iida–Sato–Sawano–Tanaka [7], as follows:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{I}_\alpha[f_1,f_2]\|_{\mathcal{M}^s_t} &\lesssim \left\| \sum_{Q\in\mathcal{D}} \frac{\chi_Q}{\ell(Q)^{2n-\alpha}} \int_{(3Q)^2} f_1(y_1)f_2(y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \right\|_{\mathcal{M}^s_t} \\ &\lesssim \|f_1\|_{\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}} \|f_2\|_{\mathcal{M}^{p_2}_{q_2}},\end{aligned}$$

where in the last estimate we have used Lemma 2.1 below.

Lemma 2.1. *Let $0 < \alpha < 2n$, $1 < q_j \le p_j < \infty$, $0 < q \le p < \infty$, $0 < t \le s < \infty$ for $j = 1, 2$. Assume*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, \quad \frac{q}{p} = \frac{t}{s}.$$

Then

$$\left\| \sum_{Q\in\mathcal{D}} \frac{\chi_Q}{\ell(Q)^{2n-\alpha}} \int_{(3Q)^2} f_1(y_1)f_2(y_2)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \right\|_{\mathcal{M}^s_t} \lesssim \|f_1\|_{\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}} \|f_2\|_{\mathcal{M}^{p_2}_{q_2}},$$

for all non-negative measurable functions f_1, f_2.

The following lemma can be located as a standard estimate to handle this bilinear fractional integral operator.

Lemma 2.2. *Let $f_1, f_2 \ge 0$ be measurable functions. Then we have*

$$\mathcal{J}_\alpha[f_1,f_2](x) \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{D}} \frac{\chi_Q(x)}{\ell(Q)^{n-\alpha}} \int_{3Q_0} f_1(x+y)f_2(x-y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

where Q_0 is a cube with center origin and side length $\ell(Q)$.

Lemma 2.3 (Iida–Sawano–Tanaka [8]; Guliyev–Hasanov–Sawano–Noi [3])**.** *Let either $1 < q \le p < \infty$, $1 < t \le s < \infty$, $q < t$, $p < s$ or $1 = q \le p < \infty$, $1 = t \le s < \infty$, $p < s$. Assume that $\{Q_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}^s_t(\mathbb{R}^n)$ and $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \subset [0,\infty)$ fulfill*

$$\mathrm{supp}(a_j) \subset Q_j, \quad \left\| \sum_{j=1}^\infty \lambda_j \chi_{Q_j} \right\|_{\mathcal{M}^p_q} < \infty.$$

Then $f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j$ converges in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ and satisfies

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \lesssim_{p,q,s,t} \left\| \sum_{j=1}^\infty \lambda_j \frac{\|a_j\|_{\mathcal{M}^s_t}}{|Q_j|^{\frac{1}{s}}} \chi_{Q_j} \right\|_{\mathcal{M}^p_q}.$$

3 Proof of Theorem 1.2

Let $v \in (s, \min(q_1, q_2))$, and let $Q \in \mathcal{D}$. By the Minkowski inequality and the Hölder inequality

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{3Q_0} f_1(\cdot + y) f_2(\cdot - y)\,\mathrm{d}y \right\|_{L^v(Q)} &\le \int_{3Q_0} \|f_1(\cdot + y) f_2(\cdot - y)\|_{L^v(Q)}\,\mathrm{d}y \\
&\le |3Q_0|^{\frac{1}{v'}} \left(\int_{3Q_0} \|f_1(\cdot + y) f_2(\cdot - y)\|_{L^v(Q)}^v\,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{v}} \\
&\lesssim |3Q_0|^{\frac{1}{v'}} \|f_1\|_{L^v(5Q)} \|f_2\|_{L^v(5Q)} \\
&\lesssim |3Q_0|^{1+\frac{1}{v}} \inf_{y_1 \in 3Q} M^{(v)} f_1(y_1) \inf_{y_2 \in 3Q} M^{(v)} f_2(y_2).
\end{aligned}$$

Then using Lemma 2.3 and Lemma 2.1, we have

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{J}_\alpha[f_1, f_2]\|_{\mathcal{M}_t^s} &\lesssim \left\| \sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\chi_Q}{\ell(Q)^{n-\alpha}} \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{v}}} \left\| \int_{3Q_0} f_1(\cdot + y) f_2(\cdot - y)\,\mathrm{d}y \right\|_{L^v(Q)} \right\|_{\mathcal{M}_t^s} \\
&\lesssim \left\| \sum_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\chi_Q}{\ell(Q)^{2n-\alpha}} \int_{(3Q)^2} M^{(v)} f_1(y_1) M^{(v)} f_2(y_2)\,\mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \right\|_{\mathcal{M}_t^s} \\
&\lesssim \|M^{(v)} f_1\|_{\mathcal{M}_{q_1}^{p_1}} \|M^{(v)} f_2\|_{\mathcal{M}_{q_2}^{p_2}}.
\end{aligned}$$

Consequently, by the boundedness of the Hardy–Littlewood maximal operator on the Morrey spaces,

$$\|\mathcal{J}_\alpha[f_1, f_2]\|_{\mathcal{M}_t^s} \lesssim \|f_1\|_{\mathcal{M}_{q_1}^{p_1}} \|f_2\|_{\mathcal{M}_{q_2}^{p_2}}.$$

References

[1] F. Chiarenza and M. Frasca, Morrey spaces and Hardy–Littlewood maximal function, Rend. Mat., **7** (1987), 273–279. [2]

[2] L. Grafakos, On multilinear fractional integrals, Studia Math. **102** (1992), no. 1, 49–56. [1]

[3] V. S. Guliyev, S. G. Hasanov, Y. Sawano and T. Noi, Non-smooth atomic decompositions for generalized Orlicz-Morrey spaces of the third kind, Acta Appl. Math. **145** (2016), 133–174. [3]

[4] N. Hatano, Bilinear estimates on Morrey spaces by using average, available at http://arxiv.org/abs/1905.10082v1. [2]

[5] N. Hatano, and Y. Sawano A note on the bilinear fractional integral operator acting on Morrey spaces, available at http://arxiv.org/abs/1904.00574. [1]

[6] Q. He, and D. Yan, Bilinear fractional integral operators on Morrey spaces, available at http://arxiv.org/abs/1805.01846v2. [2]
[7] T. Iida, E. Sato, Y. Sawano and H. Tanaka, Multilinear fractional integrals on Morrey spaces, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **28** (2012), no. 7, 1375–1384. [3]
[8] T. Iida, Y. Sawano and H. Tanaka, Atomic decomposition for Morrey spaces, Z. Anal. Anwend. **33** (2014), no. 2, 149–170. [3]
[9] C.E. Kenig and E.M. Stein, Multilinear estimates and fractional integration, Math. Res. Lett. **6** (1999), 1–15. [2]

Orlicz-fractional maximal operators in Morrey and Orlicz-Morrey spaces

飯田　毅士　(福島工業高等専門学校 一般教科)*

1. Introduction

通常の fractional integral operator I_α を定義する.

Definition 1. $0 < \alpha < n$ に対して

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

次に Young function B を導入する.

Definition 2. 関数 $B : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が Young function であるとは, 連続関数, 凸関数, 単調増加関数, $B(0) = 0$, さらに $\lim_{t\to\infty} B(t) = \infty$ を満たすとする. さらに complementary Young function $\bar{B}$ を定義する:

$$\bar{B}(t) := \sup_{s>0}(st - B(s)) \ (t > 0).$$

Luxemberg norm による n 次元立方体 Q 上の関数 f の平均を定義する.

Definition 3. n 次元立方体 Q に対して,

$$\|f\|_{B,Q} := \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_Q B\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \le 1\right\}. \tag{1}$$

Orlicz fractional maximal operator $M_{B,\alpha}$ を次のように定義する:

Definition 4. $0 \le \alpha < n$ に対して,

$$M_{B,\alpha} f(x) := \sup_{Q \ni x} \ell(Q)^\alpha \|f\|_{B,Q}.$$

$\alpha = 0$ のとき, $M_B := M_{B,0}$ と記述する. $B(t) = t$ のとき, $M_\alpha := M_{B,\alpha}$, $M := M_B$ と定める. このとき, M は Hardy-Littlewood 極大作用素, M_α は分数冪極大作用素を表す.

Hardy-Littlewood 極大作用素 M における有界性として次の結果が知られている.

Proposition 1. $0 < p \le p_0 < \infty$ に対して次が成立する.

[3]. $p > 1$ のとき, $M : \mathcal{M}^{p_0}_p \to \mathcal{M}^{p_0}_p$.

[10]. $p = 1$ のとき, $M : \mathcal{M}^{p_0}_D \to \mathcal{M}^{p_0}_1$, ここで, $D(t) = t\log^+ t$.

[10]. $0 < p < 1$ のとき, $M : \mathcal{M}^{p_0}_1 \to \mathcal{M}^{p_0}_p$.

本研究は科学研究費補助金 若手研究 (課題番号:18K13434) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 26A33, 42B25, 42B35
キーワード：Orlicz-fractional maximal operator, Morrey spaces
* 〒970-8034 福島県いわき市平上荒川字長尾 30 福島工業高等専門学校 一般教科
e-mail: tiida@fukushima-nct.ac.jp

Definition 5. Young function B に対して, $B(t) \lesssim t^{p_0}$ $(t \geq 1)$ を仮定する. このとき, Orlicz-Morrey 空間を次のように定める.

$$\mathcal{M}_B^{p_0} := \left\{ f : \|f\|_{\mathcal{M}_B^{p_0}} := \sup_{Q:\text{cube}} |Q|^{\frac{1}{p_0}} \|f\|_{B,Q} < \infty \right\}.$$

$B(t) = t^p$ のとき, $\mathcal{M}_p^{p_0} := \mathcal{M}_B^{p_0}$ と定める.

Pérez [9] は M_B の有界性に関する Young function B に対する次の特徴づけを示した.

Proposition 2 (Pérez)**.** $1 < p < \infty$ とする. このとき, 次の条件は同値である.

(i) $B \in B_p$: ある正定数 $c > 0$ に対して $\displaystyle\int_c^\infty \frac{B(t)}{t^{p+1}} dt < \infty$ が成り立つ.

(ii) $M_B : L^p \to L^p$

M_B の Morrey 空間上の有界性に関する本質的問題は [10] により示された.

Proposition 3. $1 < p \leq p_0 < \infty$ に対して, $B \in B_p$ とするとき, $M_B : \mathcal{M}_p^{p_0} \to \mathcal{M}_p^{p_0}$.

一方で, Cruz-Uribe, Moen [4, p.428] は $M_{B,\alpha} : L^p \to L^q$ が成り立つための十分条件を導き, それが必要条件でもあることが [8] によって示された.

Proposition 4. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ とする. このとき, *Young function B* に関する次の条件は同値である.

(i) $B^{\frac{q}{p}} \in B_q$: ある正定数 $c > 0$ に対して $\displaystyle\int_c^\infty \frac{B(t)^{\frac{q}{p}}}{t^{q+1}} dt < \infty$ が成り立つ.

(ii) $\left(\int_{\mathbb{R}^n} M_{B,\alpha} f(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

次の結果は Adams の不等式 [1] として知られている.

Proposition 5. $0 \leq \alpha < n$, $1 < p \leq p_0 < \frac{n}{\alpha}$, $1 < q \leq q_0 < \infty$, $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$, $\frac{q}{q_0} = \frac{p}{p_0}$ とすると, $M_\alpha : \mathcal{M}_p^{p_0} \to \mathcal{M}_q^{q_0}$ が成り立つ.

2. Main results

Proposition 3 における臨界指数の結果が成り立つ.

Theorem 1. B を *Young function* とし, $0 < p \leq p_0 < \infty$ に対して次が成立する.

1. $p = 1 < p_0$ のとき, $M_B : \mathcal{M}_D^{p_0} \to \mathcal{M}_1^{p_0}$, ここで, $D(t) = B(t) \log^+ t$.

2. $0 < p < 1$ のとき, $M_B : \mathcal{M}_B^{p_0} \to \mathcal{M}_p^{p_0}$.

Proposition 5 に対する結果に対して M_α を $M_{B,\alpha}$ に拡張する. さらに, 臨界指数に関する結果も得る.

Theorem 2. $0 \leq \alpha < n$, $0 < p \leq p_0 < \frac{n}{\alpha}$, $1 < q \leq q_0 < \infty$, $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$, $\frac{q}{q_0} = \frac{p}{p_0}$ とする. さらに, *Young function B* に対して, $D(t) := B(t) \log^+(t)$ とする.

(i) $p > 1$, $B^{\frac{q}{p}} \in B_q$ とすると, $M_{B,\alpha} : \mathcal{M}_p^{p_0} \to \mathcal{M}_q^{q_0}$.

(ii) $p = 1$, $D(t) \lesssim t^{p_0}$ $(t \geq 1)$ とすると, $M_{B,\alpha} : \mathcal{M}_D^{p_0} \to \mathcal{M}_q^{q_0}$.

(iii) $0 < p < 1$, $B(t) \lesssim t^{p_0}$ $(t \geq 1)$ とすると, $M_{B,\alpha} : \mathcal{M}^{p_0}_B \to \mathcal{M}^{q_0}_q$.

Theorem 2 に対して, 次のようにすることも可能である.

Theorem 3. $0 \leq \alpha < n$, $0 < p \leq p_0 < \frac{n}{\alpha}$, $1 < q \leq q_0 < \infty$, $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$, $\frac{q}{q_0} = \frac{p}{p_0}$ とする. さらに, *Young function* B に対して, $D(t) = B(t) \log^+(t)$ とする.

(i) $p > 1$, $B \in B_p$ とすると, $\left\|M_{B,\alpha}f\right\|_{\mathcal{M}^{q_0}_q} \leq \|f\|^{1-\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}^{p_0}_B} \|f\|^{\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}^{p_0}_p}$.

(ii) $p = 1$, $D(t) \lesssim t^{p_0}$ $(t \geq 1)$ とすると, $\left\|M_{B,\alpha}f\right\|_{\mathcal{M}^{q_0}_q} \leq \|f\|^{1-\frac{1}{q}}_{\mathcal{M}^{p_0}_B} \|f\|^{\frac{1}{q}}_{\mathcal{M}^{p_0}_D}$.

Theorem 3 を示すには次の各点不等式が本質的である.

Remark 1. $0 < p \leq p_0 < \frac{n}{\alpha}$, $0 < q \leq q_0 < \infty$ $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$ かつ, $\frac{q}{q_0} = \frac{p}{p_0}$ のとき,

$$M_{B,\alpha}f(x) \leq \|f\|^{1-\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}^{p_0}_B} M_B f(x)^{\frac{p}{q}}.$$

参考文献

[1] D. Adams, *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J., 42 (1975), 765-778.

[2] D. Adams, *Morrey Spaces*, Lecture notes in applied and numerical harmonic analysis, Birkhauser/Springer, 2014.

[3] F. Chiarenza and M. Frasca, *Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function*, Rend. Math. Appl., 7, (1987), 273-279.

[4] D. Cruz-Uribe, SFO and K. Moen, *A fractional Muckenhoupt-Wheeden theorem and its consequences*, Integr. Equ. Oper. Theory 76 (2013), 3, 421–446.

[5] D. Cruz-Uribe, SFO, José Maria Martell and C. Pérez, *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia. Operator Theory: Advances and Applications*, 215. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. xiv+280 pp.

[6] T. Iida, *Note on the integral operators in weighted Morrey spaces*, Hokkaido Math. J., Vol.48, No.2(2019).

[7] T. Iida, *Orlicz-fractional maximal operators in Morrey and Orlicz-Morrey spaces*, submitted.

[8] T. Iida and Y.Sawano, *Orlicz-fractional maximal operators on weighted L^p spaces*, J. Math. Inequal., 13, (2019), 2, 369-413.

[9] C. Pérez, *On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p-spaces with different weights*, Proc. London Math. Soc. (3), 71(1), (1995), 135-157.

[10] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, *Orlicz-Morrey spaces and fractional operators*, Potential Anal., 36, (2012), 517-556.

Dual of Choquet spaces with weighted Hausdorff content

齋藤 洋樹 [1] (日本大学 理工学部)

1 Hausdorff 容量と荷重付き Hausodorff 容量

n を空間次元とする. $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ で中心 x, 半径 r の開球を表す. $0 < d \leq n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ に対し,

$$H^d(E) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} r_j^d, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j)\right\},$$

を E の d 次元 Hausdorff 容量という. ここで下限は, E を被覆する開球の族 $\{B(x_j, r_j)\}$ 全体をわたってとる. $d = n$ のときは H^d は本質的に Lebesgue 測度となる.

Hausdorff 容量は $\mathbb{R}^n$ の部分集合に対して定義される集合関数となるが, 測度の性質のうち, 加法性を持たない (劣加法的となる). このような非加法的測度に対する積分の理論はいろいろあるが, 一般に $\mathbb{R}^n$ の部分集合に対し, 非負の実数を対応させる非加法的集合関数 $\mathcal{C}$ に対し, 積分を次のように定める:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{d}\mathcal{C} := \int_0^{\infty} \mathcal{C}(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\})\, \mathrm{d}t, \quad f(x) \geq 0.$$

上記の積分の定義は Choquet 積分と呼ばれる. Hasudorff 容量やその積分は PDE やポテンシャル論に多くの応用を持つ [4, 6, 7].

次に, w を $\mathbb{R}^n$ 上の非負局所可積分関数とする. これを荷重 (weight) と呼ぶ. また $⨍_E w(x)\, \mathrm{d}x = |E|^{-1} \int_E w(x)\, \mathrm{d}x$ と表す. このとき,

$$H_w^d(E) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} r_j^d ⨍_{B(x_j, r_j)} w(x)\, \mathrm{d}x, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j)\right\},$$

を E の d 次元荷重付き Hausdorff 容量という. これは, 荷重付き Sovolev 空間 $W_w^{m,1}(\Omega)$ の関数の除外集合を測る際に用いられる [5].

一般の関数 f に対して, $(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\, \mathrm{d}\mathcal{C})^{1/p}, 1 \leq p < \infty$, はノルムとならない (三角不等式に定数倍がつく) が, 位相を定めることができる. そこで, コンパクト台を持つ連続関数全体 $C_0(\mathbb{R}^n)$ の上記のセミノルムによる完備化を $L^p(\mathcal{C})$ と表す. 本報告では, $L^p(H_w^d)$ の双対空間 $L^p(H^d)^*$ を決定する問題を考える.

以下, $A \lesssim B$ である定数 C によって $A \leq CB$ とかけることを意味し, $A \approx B$ を $A \lesssim B$ かつ $A \gtrsim B$ のことと定め, A と B は比較可能 (comparable) ということにする.

---

[1] The author is supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (19K14577), the Japan Society for the Promotion of Science.

2 Adamsの結果と主定理

まず次の点に注意する. $g \in L^{p'}(H^d)$, $1/p + 1/p' = 1(1 < p < \infty)$ に対し, $F_g : L^p(H^d) \to \mathbb{R}$ を

$$F_g(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,\mathrm{d}H^d, \quad f \in L^p(H^d)$$

と定めると, F は斉次性を持つ汎関数であることがわかる. また, 定数倍付きのHölderの不等式が成立することが知られており,

$$|F_g(f)| \le c\|f\|_{L^p(H^d)}\|g\|_{L^{p'}(H^d)}$$

も成り立つ. このことから, F_g は有界である. だが, H^d による Choquet 積分は一般に加法性を持たないので, 線形汎関数とはならない. Adams は, $L^p(H^d)^*$ を次の測度の Morrey 空間として特徴付けた.

定義 2.1 $\mathbf{L}^{1,d}$ を符号付き *Radon* 測度 μ の集合で,

$$M_d\mu(x) := \sup_{r>0} \frac{|\mu|(B(x,r))}{r^d} \in L^\infty$$

を満たすものとする. これを *Morrey* 空間と呼ぶ *[1]*. また, $|||\mu|||_d := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} M_d\mu(x)$ は $\mathbf{L}^{1,d}$ のノルムを与える.

定理 2.1 (Adams [1]) $L^1(H^d)$ の双対空間は $\mathbf{L}^{1,d}$ である. 正確には, $F \in L^1(H^d)$ に対し $\mu \in \mathbf{L}^{1,d}$ を対応させる全単射線形写像が存在し, $\|F\| = |||\mu|||_d$ が成り立つ.

続いて Adams は [2] において, $1 < p < \infty$ に対し, $L^p(H^d)$ の双対空間は,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_d)^{p'}\mu\,\mathrm{d}H^d < \infty$$

となるような Radon 測度 μ 全体で特徴づけることができることを示している. ただしここで,

$$|||\mu|||_{q,d} := \|M_d\mu\|_{L^q(H^d)}$$

と定義したときに, 右辺の量がノルムにならない (三角不等式に定数がつく) ことに注意が必要で, 同一視は単純にノルム空間としての同型の意味ではない. そのため, 上述のような言い回しをしなければならなかった. 以下, Adams の記号ではないことを断ったうえで, Adams の $\mathbf{L}^{1,d}$ に代わる記号を導入しよう. $1 < q < \infty$ に対し,

$$\mathbb{L}^{q,d} := \{\mu : \text{Radon 測度}, |||\mu|||_{q,d} < \infty\}$$

と定める. $\mathbb{L}^{\infty,d} := \mathbf{L}^{1,d}$ とする. 先ほどの注意のように, セミノルム空間となるが $L^p(H^d)$ の双対空間について次のように述べることができる:

定理 2.2 (Adams [2]) $L^p(H^d)$ の双対空間は $\mathbb{L}^{p',d}$ である. 正確には, $F \in L^p(H^d)$ に対し $\mu \in \mathbb{L}^{p',d}$ を対応させる全単射線形写像が存在し, $\|F\| \approx |||\mu|||_{p',d}$ が成り立つ.

本報告の主題は, Adams の結果を荷重付 Hausdorff 容量で議論することである. そのために, 測度の荷重付 Morrey 空間を次のように定める.

定義 2.2 測度の荷重付極大関数を

$$M_{w,d}\mu(x) = \sup_{r>0} r^d \frac{|\mu|(B(x,r))}{⨍_{B(x,r)} w(y)\,\mathrm{d}y}$$

と定め,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_w^{\infty,d} &:= \{\mu : Radon\,\text{測度}, |||\mu|||_{\infty,d,w} := \|M_{w,d}\mu\|_{L^\infty} < \infty\}, \\ \mathbb{L}_w^{q,d} &:= \{\mu : Radon\,\text{測度}, |||\mu|||_{q,d,w} := \|M_{w,d}\mu\|_{L^q(H_w^d)} < \infty\} \end{aligned}$$

と定める.

以上の準備のもと, 本報告における主定理は次のようになる.

定理 2.3 (in preparation) $1 \le p < \infty$ に対し, $L^p(H_w^d)$ の双対空間は, $\mathbb{L}_w^{p',d}$ と同一視される. ノルムの等長性は比較可能の意味で成り立つ.

3 証明

まず $p = 1$ の場合を考える. 最初の主張を見ると, $L^1(H_w^d)$ の双対空間が, 測度の Morrey 空間に荷重を付ける際に, 前節のようにした理由がわかる.

主張 3.1 任意の $\mu \in \mathbb{L}_w^{\infty,d}$ に対し,

$$F_\mu(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\mu, \quad f \in L^1(H_w^d)$$

と定めると, $F_\mu \in L^1(H_w^d)^*$ であり, かつ $\|F_\mu\| \le \|M_{w,d}\mu\|_{L^\infty}$ が成り立つ.

Proof. F は明らかに線形である.

$$|F_\mu(f)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f|\,\mathrm{d}|\mu| = \int_0^\infty |\mu|(|f| > t)\,\mathrm{d}t.$$

より, 球による被覆を

$$\{|f| > t\} \subset \bigcup_{j=1}^\infty B(x_j, r_j)$$

ととれば,

$$\begin{aligned} |\mu|(|f| > t) &\le \sum_{j=1}^\infty |\mu|(B(x_j, r_j)) \\ &= \sum_{j=1}^\infty r_j^d ⨍_{B(x_j,r_j)} w\,\mathrm{d}x \left(r_j^d ⨍_{B(x_j,r_j)} w\,\mathrm{d}x \right)^{-1} |\mu|(B(x_j, r_j)) \\ &\le \|M_{w,d}\mu\|_{L^\infty} \sum_{j=1}^\infty r_j^d ⨍_{B(x_j,r_j)} w\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

となる．したがって,

$$|\mu|(|f|>t) \le \|M_{w,d}\mu\|_{L^\infty} H^d_w(|f|>t)$$

and then

$$|F_\mu(f)| \le \|M_{w,d}\mu\|_{L^\infty} \int_0^\infty H^d_w(|f|>t)\,\mathrm{d}t = \|M_{w,d}\mu\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f|\,\mathrm{d}H^d_w.$$

これは $\|F_\mu\| \le \|M_{w,d}\mu\|_{L^\infty}$ を意味している． ■

主張 3.2 任意の $F \in L^1(H^d_w)^*$ に対し, $\mu \in \mathbb{L}^{\infty,d}_w$ が存在し,

$$F(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\mu, \quad f \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ．

Proof. $F \in L^1(H^d_w)^*$ とする．$C_0(\mathbb{R}^n) \subset L^1(H^d_w)$ に注意して, Riesz の表現定理より, Radon 測度 μ が存在し

$$F(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\mu, \quad f \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ．$F \in L^1(H^d_w)^*$ であることに注意して,

$$|F(f)| \le \|F\|\|f\|_{L^1(H^d_w)}.$$

一方, 任意の $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ で,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} \psi\,\mathrm{d}|\mu|\right| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |\psi|\,\mathrm{d}|\mu| \\
&= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} \phi\,\mathrm{d}\mu : \phi \in C_0(\mathbb{R}^n), |\phi| \le |\psi|\right\} \\
&\le \sup\left\{\|F\|\|\phi\|_{L^1(H^d_w)} : \phi \in C_0(\mathbb{R}^n), |\phi| \le |\psi|\right\} \\
&\le \|F\|\|\psi\|_{L^1(H^d_w)}
\end{aligned}$$

となるので, ψ として, $\mathbf{1}_{B(x,r)}(y) \le \psi(y) \le \mathbf{1}_{B(x,r+\varepsilon)}(y)$ を満たすものをとれば,

$$|\mu|(B(x,r)) \le \|F\| \cdot (r+\varepsilon)^d \fint_{B(x,r+\varepsilon)} w\,\mathrm{d}y$$

が任意の $\varepsilon > 0$ で成り立つ．よって

$$\|M_{w,d}\mu\|_{L^\infty} \le \|F\|$$

を得るが, これは $\mu \in \mathbb{L}^{\infty,d}_w$ を意味している． ■

次に $p > 1$ の場合を議論する．$F \in L^p(H^d_w)^*$ とする．$p = 1$ の場合と同様に, Riesz の表現定理より, Radon 測度 μ で,

$$F(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\,\mathrm{d}\mu, \quad \phi \in C_0(\mathbb{R}^n) \tag{1}$$

を満たすものが存在する．極限移行により, 下半連続関数 ϕ に対しても成り立つ．次を示せばよい．

主張 3.3

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_{w,d}\mu)^{p'} \,\mathrm{d}H_w^d \leq A \int_{\mathbb{R}^n} (M_{w,d}\mu)^{p'-1} \,\mathrm{d}|\mu|. \tag{2}$$

この証明はここでは省略することにして, これが示されれば十分であることを説明する. $\phi = (M_{w,d}\mu)^{p'-1}$ を (1) に代入すると,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (M_{w,d}\mu)^{p'-1} \,\mathrm{d}|\mu| &\leq \|F\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(M_{w,d}\mu)^{p'-1}|^p \,\mathrm{d}H_w^d \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|F\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} (M_{w,d}\mu)^{p'} \,\mathrm{d}H_w^d \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

(2) より,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_{w,d}\mu)^{p'} \,\mathrm{d}H_w^d \leq A \int_{\mathbb{R}^n} (M_{w,d}\mu)^{p'-1} \,\mathrm{d}|\mu| \leq A\|F\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} (M_{w,d}\mu)^{p'} \,\mathrm{d}H_w^d \right)^{\frac{1}{p}}$$

となり, これは $\|M_{w,d}\mu\|_{L^{p'}(H_w^d)} \leq A_d\|F\|$ を意味する.

逆を示そう. つまり $\mu \in \mathbb{L}_w^{p',d}$ とし,

$$F(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in L^p(H_w^d)$$

と定めたとき, $F \in L^p(H_w^d)^*$ となることを示したい. 明らかに線形であるから有界性を示す. 次の主張から得られる.

主張 3.4

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi \,\mathrm{d}|\mu| \leq A \int_{\mathbb{R}^n} \phi M_{w,d}\mu \,\mathrm{d}H_w^d, \quad \phi \in C_0(\mathbb{R}^n), \phi \geq 0. \tag{3}$$

実際, もしこの主張が示されると, Hölder の不等式より,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi \,\mathrm{d}\mu \right| \leq A \int_{\mathbb{R}^n} \phi M_{w,d}\mu \,\mathrm{d}H_w^d \leq A\|\phi\|_{L^p(H_w^d)} \|M_{w,d}\mu\|_{L^{p'}(H_w^d)}$$

となり,

$$\|F\| \leq A\|M_{w,d}\mu\|_{L^{p'}(H_w^d)}$$

を得る. 以上の議論により, 主張 3.4 を示せばよい, というのが Adams [2] のアイディアである. しかし, この論文により主張 3.4 には誤りがある可能性があることは講演の当日に述べた通りである. そこでは, この主張を証明するためのアイディアを説明していなかったが, 荷重がない場合で簡単に述べる.

以下突然 2 進立方体の議論になっているが, 技術的な問題であり, 本質的な違いに悩む必要はないことを注意しておく.

補題 3.1 U を相対コンパクトな開集合とすと, U を被覆する有限個の 2 進立方体の族 $\{Q_j\}$ で, 互いに交わらず, $H^d(U \cap Q_j) \approx \ell(Q_j)^d$ が任意の j で成り立ち,

$$\sum_{Q_j \subset Q} \ell(Q_j)^d \lesssim \ell(Q)^d, \quad Q \in \mathcal{D} \tag{4}$$

を満たすものが存在する.

この補題は, 相対コンパクトな U を H^d で測るときに選ばれる被覆は, 一つ一つが代わりの利かない立方体で構成されていて, packing condition と呼ばれる (4) を満たすようにできるということ. これにより, 積分が線形性 (等号は比較可能の意味で) を持つことが示される.

まず $\varepsilon > 0$ を

$$\int_{\{\phi \le \varepsilon\}} \phi \, \mathrm{d}|\mu| \le \int_{\{\phi > \varepsilon\}} \phi \, \mathrm{d}|\mu|.$$

を満たすようにとり, $k = 1, 2, \ldots$ に対し, $U_k := \{\phi > \varepsilon k\}$ とし, 補題の条件を満たす $\{Q_{k,j}\}$ を選ぶ. すると,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \phi \, \mathrm{d}|\mu| &\le 2 \int_{U_1} \phi \, \mathrm{d}|\mu| \le 4\varepsilon \int_{U_1} \left(\sum_k \mathbf{1}_{U_k} \right) \mathrm{d}|\mu| \\ &\le 4\varepsilon \sum_{k,j} |\mu|(Q_{k,j}) = 4\varepsilon \sum_{k,j} a_{k,j} \ell(Q_{k,j})^d, \qquad a_{k,j} := \frac{|\mu|(Q_{k,j})}{\ell(Q_{k,j})^d}.\end{aligned}$$

となるが, packing condition から導かれる比較可能性と, 共単調性 (comonotonicity) から得られる線形性により, 上式は

$$\approx 4\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k,j} a_{k,j} \mathbf{1}_{U_k \cap Q_{k,j}} \right) \mathrm{d}H^d \le 4\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_k \mathbf{1}_{U_k} \right) M_\lambda \mu \, \mathrm{d}H^d \le 4 \int_{\mathbb{R}^n} \phi M_\lambda \mu \, \mathrm{d}H^d$$

となる.

References

[1] D. R. Adams, *A note on Choquet integral with respect to Hausdorff capacity*, in Function Spaces and Applications, Lund, 1986, in: Lecture Notes in Math. vol. 1302, Springer, 1988, 115–124.

[2] D. R. Adams, *Choquet integrals in potential theory*, Publ. Mat. **42** (1998) 3–66.

[3] J. Orobitg and J. Verdera, *Choquet integrals, Hausdorff content and the Hardy-Littlewood maximal operator*, Bull. London Math. Soc., **30** (1998), no. 2, 145–150.

[4] S. Shi and J. Xiao, *Fractional capacities relative to bounded open Lipschitz sets complemented*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **56**, no. 3 (2017), 1–22.

[5] B. O. Turesson, *Nonlinear Potential Theory and Weighted Sobolev Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 1736. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[6] J. Xiao, *Homogeneous endpoint Besov space embeddings by Hausdorff capacity and heat equation*, Adv. Math., **207**, (2006), 828–846.

[7] J. Xiao, *Carleson embeddings for Sobolev spaces via heat equation*, J. Differential Equations, **224**, (2006), 277–295.

メビウス型包除積分ニューラルネットワークによるデータ解析

本田あおい (九工大情報工)[*1]
大北 剛 (九工大情報工)[*2]

1. はじめに

本論文では包除積分数理モデルを用いた機械学習的なデータ解析手法を提案する．対象とする問題は教師あり学習で, これは事前に与えられたデータへのあてはまりがよくなるように学習してモデルの同定を行うものである．本研究の目的はこれまでに提案してきた包除積分数理モデルによる統計的データ解析手法に機械学習の手法を取り入れることで, 双方の長所を合わせ持つデータ解析手法を確立することである．具体的には, 構築されたモデルの解釈が可能であるというメビウス型包除積分数理モデルの長所を残したまま, ニューラルネットワークの長所であるデータを前処理することなく自動で学習ができるという利点や色々な学習トリックの仕組みを組み入れ, さらにこれらのトリックの原理の解析や効果的な初期値の設定方法を考案するなど新たな改良を行うなど様々な発展が期待できる．対象となる観測データはベクトルで表された説明変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ と目的変数 $y \in \mathbb{R}$ の組 $(\boldsymbol{x}, y)$ である．観測データが多数得られており, これを用いて目的変数 y を決定する数理モデル $F(\boldsymbol{x})$ を構築したいとする．

2. メビウス型包除積分モデル

定義 1 (メビウス型包除積分モデル Cf.[1]) N 個の数値からなる説明変数の組 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_N) \in [0, K]^N, 0 < K \leq \infty$ を $\Omega = \{1, \ldots, n, \ldots, N\}$ 上の関数とする．メビウス型包除積分モデルは次のように定義される:

$$F(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{w}, \otimes) := \sum_{A \in \mathcal{P}(X)} w_A \left(\bigotimes_{n \in A} x_n \right) := \sum_{A \in \mathcal{P}(X)} w_A \left(\bigotimes_{n \in A} h(a_n x_n + b_n) \right).$$

ここで, $\mathcal{P}(X)$ は X の部分集合全体, $\boldsymbol{w} = \{w_A\}_{A \in \mathcal{P}(X)}$, 関数 h はシグモイド関数などのような単調な $[0, K]$ 値関数で活性化関数と呼ばれる．$\otimes$ は 2 項演算から自然に定義される適当な多項演算, ただし $\displaystyle\bigotimes_{n \in \emptyset} x_n := K$ である．

注意 2 $\otimes$ として t-ノルムのような掛け算型の演算を使用すると, 包除積分がよい性質を持つことが分かっている．代表的な演算例は min 演算, あるいは代数積 ($K = 1$ の場合は単に掛け算となる) である．例えば, $\Omega = \{1, 2, 3\}$ のとき, $K = 1$ として $\otimes$ が代数積の場合のメビウス型包除積分モデルを書き下すと:

$$\begin{aligned} y(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{w}, \times) &= w_{\{1\}} x_1 + w_{\{2\}} x_2 + w_{\{3\}} x_3 + w_{\{1,2\}} x_1 x_2 + w_{\{1,3\}} x_1 x_3 \\ &\quad + w_{\{2,3\}} x_2 x_3 + w_{\{1,2,3\}} x_1 x_2 x_3 + w_{\emptyset} \end{aligned}$$

となる．つまり, 代数積の場合は交互作用項を加えた重回帰分析に相当している．ただし, 重回帰分析で用いられる交互作用項の演算は代数積ではなく単に掛け算であるため厳密には同じではない．

[*1] 〒820-8502 福岡県飯塚市川津 680-4 九州工業大学 情報工学部
e-mail: aoi@ces.kyutech.ac.jp
[*2] e-mail: tsuyoshi.okita@gmail.com

注意 3 メビウス型包除積分モデルは, $\acute{x}_n := h(a_n x_n + b_n)$ とすると説明変数の組 $\boldsymbol{x}$ から次のように作成した拡大説明変数ベクトルを $\boldsymbol{x}^{\mathcal{P}}$ と書くことにする: $\boldsymbol{x}^{\mathcal{P}} := \left(\bigotimes_{n\in A} \acute{x}_n\right)_{A\in\mathcal{P}(\Omega)} = (K, \acute{x}_1, \acute{x}_2, \ldots, \acute{x}_N, \acute{x}_1\otimes\acute{x}_2, \ldots, \acute{x}_{N-1}\otimes\acute{x}_N, \acute{x}_1\otimes\acute{x}_2\otimes\acute{x}_3, \ldots, \acute{x}_1\otimes\cdots\otimes\acute{x}_N)^\top$ と重みベクトル $\boldsymbol{w} := (w_A)_{A\in\mathcal{P}(\Omega)} = (w_\emptyset, w_{\{1\}}, w_{\{2\}}, \ldots, w_{\{N\}}, w_{\{1,2\}}, \ldots, w_{\{N-1,N\}}, w_{\{1,2,3\}}, \ldots, w_\Omega)^\top$ とすると $F(\boldsymbol{x};\boldsymbol{w},\otimes) = \langle \boldsymbol{x}^{\mathcal{P}}, \boldsymbol{w}\rangle$ と内積で表現できる. 以降 $\acute{x}_n$ を単に x_n と書く.

観測データを用いて重みベクトル $\boldsymbol{w}$ を定める. 観測データ集合は M 組の観測データからなる $(N+1)\times M$-行列, $\mathcal{D} = (\boldsymbol{x}_m, y_m)_{m=1}^M, \boldsymbol{x}_m \in [0,K]^N$ である.

(i) 正解ラベルは何らかの測定値で $y_m \in [0,\infty)$ とする. これは回帰と呼ばれる問題である. 観測データには一般にノイズが含まれている. このノイズが $N(0,\sigma^2)$ に従う確率変数であると仮定する.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &:= [y_1, \cdots, y_m, \cdots, y_M]^\top, \\
\boldsymbol{w} &:= \left[w_\emptyset, w_{\{1\}}, \cdots, w_{\{N\}}, w_{\{1,2\}}, \cdots, w_{\{N-1,N\}}, w_{\{1,2,3\}}, \cdots, w_\Omega\right]^\top, \\
X &:= \left[\boldsymbol{x}_1^{\mathcal{P}\top} \cdots \boldsymbol{x}_m^{\mathcal{P}\top} \cdots \boldsymbol{x}_M^{\mathcal{P}\top}\right]^\top \\
&= \begin{bmatrix}
K & x_{1,1} & \cdots & x_{1,N} & \bigotimes_{n\in\{1,2\}} x_{1,n} & \cdots & \bigotimes_{n\in\{N-1,N\}} x_{1,n} & \bigotimes_{n\in\{1,2,3\}} x_{1,n} & \cdots & \bigotimes_{n\in\Omega} x_{1,n} \\
\vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots \\
K & x_{m,1} & \cdots & x_{m,N} & \bigotimes_{n\in\{1,2\}} x_{m,n} & \cdots & \bigotimes_{n\in\{N-1,N\}} x_{m,n} & \bigotimes_{n\in\{1,2,3\}} x_{1,n} & \cdots & \bigotimes_{n\in\Omega} x_{1,n} \\
\vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots \\
K & x_{M,1} & \cdots & x_{M,N} & \bigotimes_{n\in\{1,2\}} x_{M,n} & \cdots & \bigotimes_{n\in\{N-1,N\}} x_{M,n} & \bigotimes_{n\in\{1,2,3\}} x_{M,n} & \cdots & \bigotimes_{n\in\Omega} x_{M,n}
\end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

とおくと, 尤度関数 $L(\boldsymbol{w};\mathcal{D})$ を最大化する $\hat{\boldsymbol{w}}$ が求める重みベクトルであり

$$\hat{\boldsymbol{w}} = (X^\top X)^{-1} X^\top \boldsymbol{y},$$

で得られる [2]. これは二乗誤差

$$E_{SE}(\boldsymbol{w},\otimes;\mathcal{D}) \ = \ \sum_{m=1}^M |y_m - \langle \boldsymbol{x}_m^{\mathcal{P}}, \boldsymbol{w}\rangle|^2$$

を最小化する $\boldsymbol{w}$, つまり最小二乗法で求めた重みベクトル $\arg\min_{\boldsymbol{w}} E_{SE}(\boldsymbol{w},\otimes;\mathcal{D})$ とも一致する.

(ii) 目的変数 y のとる値は成功か失敗のどちらか, つまり $y_m \in \{0,1\}$ とする. これは分類問題と呼ばれる. ロジスティック回帰モデルを用いると

$$\hat{y}_m = p(y=1 \mid \boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1+e^{-\langle \boldsymbol{x}_m^{\mathcal{P}}, \boldsymbol{w}\rangle}}$$

であり, これは成功と失敗の比を

$$\frac{\hat{y}}{1-\hat{y}} = \frac{p}{1-p} = e^{\langle \boldsymbol{x}_m^{\mathcal{P}}, \boldsymbol{w}\rangle}$$

としたものである.

$$\begin{aligned}\hat{y}_m &= F(\boldsymbol{x}_m) = \left(\frac{1}{1+e^{-\langle \boldsymbol{x}_m^{\mathcal{P}}, \boldsymbol{w}\rangle}}\right)^{y_m}\left(1-\frac{1}{1+e^{-\langle \boldsymbol{x}_m^{\mathcal{P}}, \boldsymbol{w}\rangle}}\right)^{1-y_m} \\ &= \hat{y}_m{}^{y_m}\ (1-\hat{y}_m)^{1-y_m}\end{aligned}$$

とも表せるので, 尤度関数は

$$L(\boldsymbol{w}; y_1, \ldots, y_M) = \prod_{m=1}^{M} \hat{y}_m{}^{y_m}\ (1-\hat{y}_m)^{1-y_m}$$

したがって対数尤度関数は

$$\log L(\boldsymbol{w}; y_1, \ldots, y_M) = \sum_{m=1}^{M} \{y_m \log \hat{y}_m + (1-y_m)\log(1-\hat{y}_m)\}.$$

であり, 最尤推定量として求めた $\boldsymbol{w}$ はクロスエントロピー

$$E_{2CE}(\boldsymbol{w}, \otimes; \mathcal{D}) = -\sum_{m=1}^{M} \{y_m \log \hat{y}_m + (1-y_m)\log(1-\hat{y}_m)\}$$

を最小にする $\boldsymbol{w}$, つまり $\arg\min_{\boldsymbol{w}} E_{CE}(\boldsymbol{w}, \otimes; \mathcal{D})$ に対応する.

(iii) 多クラス分類を行う場合には, 目的変数は K 次元ベクトル（K はクラス数), $Y = \{\boldsymbol{y}_m\}_{m=1}^{M} = (y_{m,1}, \ldots, y_{m,k}, \ldots, y_{m,K})_{m=1}^{M}$ であり, 教師データの $\boldsymbol{y}_m$ は該当クラスの成分が 1, それ以外の成分が 0 である. それに伴いパラメータの次元も増え $W = (\boldsymbol{w}_k)_{k=1}^{K} = (w_{A,1}, \ldots, w_{A,k}, \ldots, w_{A,K})_{A\in\mathcal{P}(\Omega)}$ となり, 数理モデルは

$$\hat{y}_{m,k} = \frac{e^{\langle \boldsymbol{x}_m^{\mathcal{P}}, \boldsymbol{w}_k\rangle}}{\sum_{i=1}^{K} e^{\langle \boldsymbol{x}_m^{\mathcal{P}}, \boldsymbol{w}_i\rangle}}$$

である. これは, 各クラスの比を

$$\hat{y}_{m,1} : \cdots : \hat{y}_{m,k} : \cdots : \hat{y}_{m,K} = e^{\langle \boldsymbol{x}_m^{\mathcal{P}}, \boldsymbol{w}_1\rangle} : \cdots : e^{\langle \boldsymbol{x}_m^{\mathcal{P}}, \boldsymbol{w}_k\rangle} : \cdots : e^{\langle \boldsymbol{x}_m^{\mathcal{P}}, \boldsymbol{w}_K\rangle}$$

としたもので, $\sum_{k=1}^{K} \hat{y}_{m,k} = 1$ である. $K = 2$ の場合は (ii) の分類問題に相当する. 多項分布の分布関数を考えると, 尤度関数は

$$L(\boldsymbol{w}_k; Y) = \prod_{m=1}^{M} \hat{y}_{m,1}{}^{y_{m,1}} \cdots \hat{y}_{m,k}{}^{y_{m,k}} \cdots \hat{y}_{m,K}{}^{y_{m,K}}.$$

(ii) の場合と同様に, この対数をとった対数尤度関数の符号を反転したものがクロスエントロピー:

$$E_{CE}(W, \otimes; \mathcal{D}) = -\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K} y_{m,k} \log \hat{y}_{m,k}$$

でありこれを最小にする W が求めるパラメータである.

問題に合わせて誤差関数として E_{SE}, E_{2CE}, E_{CE} を選択する. 学習とは教師データを用いて誤差関数を小さくするパラメータを決定することである. 例えば勾配降下法なら

ば勾配 $\nabla E(\boldsymbol{w}, \otimes)$ を計算し, $\boldsymbol{w}^{(t+1)} = \boldsymbol{w}^{(t)} + \varepsilon \nabla E(\boldsymbol{w}, \otimes)$ を1エポックの重み $\boldsymbol{w}$ の更新とする. このパラメータの決定手法は通常のニューラルネットワークと同様であり, 違いはネットワークの構成のみである. 一般に数式はどんなものでもネットワークで表現することが可能であるので, メビウス型包除積分モデルに合わせてネットワークを設計し, あとはニューラルネットワークの学習手法を用いてパラメータを決定する. ニューラルネットワークにおける様々なトリックも活用できる. 図1は(i)の回帰で $N = 3$, つまり $X = \{1, 2, 3\}$ の場合のメビウス型包除積分モデルを離散グラフで表したもので, これをメビウス型包除積分ネットワークと呼ぶことにする:

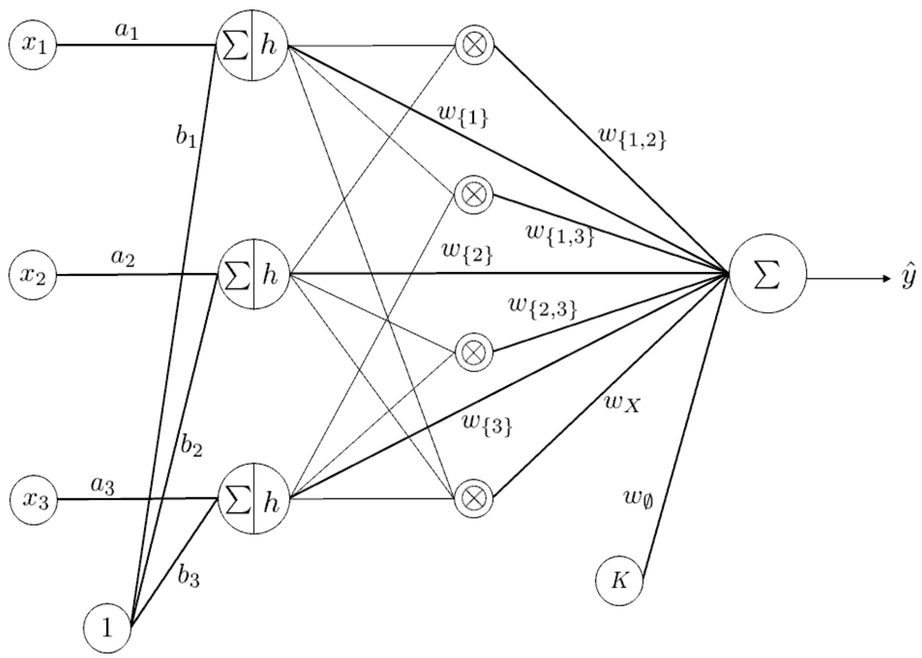


図 1: $X = \{1, 2, 3\}$ の場合のメビウス型包除積分ネットワーク

図1が示すように, メビウス型包除積分ネットワークでは通常のニューラルネットワークと異なり全ての隣り合う層のユニット間にエッジがつながっているわけではない. 一方, ニューラルネットワークにおいても確率的にノードの無効化（ドロップアウト）やエッジの無効化を行うことが過完備表現の抑制となり過学習防止に有効であることが知られている.

3. 実験

提案モデルを用いて機械学習用のオープンアクセスデータを用いて, 通常のニューラルネットワークとの比較実験を行った. ところ, 過学習が抑制されよい結果を得ることができたので紹介する.

3.1. 使用データ

機械学習研究用のリポジトリサイト Kaggle(Kaggle.com) のデータ解析初心者向けデータの「タイタニック」を使用, 表2のように数値化を行った. 称号や出発港の数値化は, 選択肢をいくつかのグループにわけ, グループに数値を割り当てた. グループ分けや数値の割り当ては, 目的変数との相関係数等からあてはまりのよさそうなものを選んだも

表 1: Kaggle のタイタニックデータ

データの種類	説明変数の数 (N)	データセット数 (M)
2 クラス分類問題	8	891(学習用) + 418(検証用)

表 2: タイタニックデータの説明変数と目的変数

	特徴量	特徴量の値	数値に変換したもの
説明変数	称号	{Mr, Rev, Major, Dr, Miss, Mme, Lady, ...}	{0, 1, 2, 3} {0, 1, 2}
	旅客等級	{下級, 中級, 上級}	{0, 1}
	性別	{男, 女}	{0,1}
	単独乗船か否か	{家族と同乗, 単独乗船}	{0, 1}
	チケット料金	[0 ドル, 512 ドル]	そのまま使用
	出発港	{サウザンプトン, クィーンズタウン, シェルブール}	{0 サウザンプトン, 1 それ以外}
	部屋番号	{Nan, C85, C123, ...}	{0, 1, 2}
	チケット番号	{A/5 21171, PC 17599, ...}	{0, 1, 2, 3}
目的変数	生存か否か	{死亡, 生存}	{0, 1}

のである.

3.2. ネットワークモデルのハイパーパラメータと実験結果

実験に用いたメビウス型包除積分ネットワークと対照実験のニューラルネットワークの詳細は表 3 の通りである. 2-加法的とは $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ に対して $|A| > 2$ ならば $w_A = 0$ と

表 3: 実験結果

		学習の正答率	検証の正答率
ニューラルネットワーク	3 層隠れ層 255 個	0.89	0.76
	3 層隠れ層 36 個	0.87	0.74
メビウス型包除積分ネットワーク	一般の場合	0.84	0.77
	2-加法的の制限つき	0.84	0.78
	単調性と 2-加法的の制限つき	0.84	0.79

したものである. ネットワークモデルでは対応するユニットを削除すれば実現できる. これは,積分に用いる非加法的測度にゆるい加法性条件を付けたものに相当する. また単調性を付加するとは任意の $A \in \mathcal{P}(\Omega), i \in \Omega$ に対して

$$w_A \geq -\sum_{B \subsetneq A, B \ni i} w_B$$

表 4: 学習後のネットワークの重みから算出したシャプレイ値

称号	性別	単独乗船	旅客等級	乗船料金	乗船港	部屋番号	チケット番号
0.15	0.20	0.27	0.04	0.12	0.05	0.02	0.12

を満たすように, パラメータ $\boldsymbol{w}$ を制限するもので, これは積分に用いる非加法的測度が単調性条件を満たすことに相当する. 比較のために用いたニューラルネットワークの隠れ層の個数は, それぞれ一般のメビウス型包除積分ネットワークと2-加法的メビウス型包除積分ネットワークのユニットの個数と大体の個数を合わせたものである. 分類問題の場合, (ii) や (iii) は図1に示すようなメビウス型包除積分ネットワークモデルの出力層を1層増やしシグモイド関数やソフトマックス関数を表すユニットを追加することで簡単に実現できる. 今回は2値分類問題であるので, 出力層にシグモイド関数を追加した. 学習の正答率は, モデルの学習データへの当てはまりの良さ (フィッティング精度) を表しており, 今回は3層のニューラルネットワークモデルの隠れ層255個の場合が最もフィッティング精度が高い. 検証の正答率が学習に用いていないデータを用いた推定精度でありこれがモデルの性能を表す. 検証の正答率は提案モデルであるメビウス型包除積分ネットワークの方が高く, 一般の場合, 2-加法的, 単調性と制限を強くするほど検証の正答率が高くなっており制限が強いほど過学習が抑制されていることがわかる. ニューラルネットワークは学習の正答率は高いが, 検証の正答率が低く過学習が起こっている. タイタニックデータは検証データの推定でのコンペティションが設定されている. 単調性と2-加法性を付与したもののテスト正答率 0.79 はコンペティションの上位10%に入るというまずまずの正答率である.

3.3. 学習後モデルの解釈

学習後のパラメータが積分に用いた非加法的測度に相当するため, 色々な指標を利用することができる. 例えば非加法的測度からシャプレイ値を算出することで各説明変数の目的変数への寄与度が算出できる. シャプレイ値はネットワークの重みから

$$\phi_i(\boldsymbol{w}) = \sum_{A \ni i} w_A$$

で計算できる. 今回は性別, 単独乗船か否かが生存への寄与度が高いことがわかった.

4. 今後の課題

包除積分を利用したネットワークモデルの提案とデータによる検証実験結果を紹介した. 提案モデルは過学習が抑制され, また学習後のネットワークの解釈可能なネットワークとなる. 今後の課題は画像データなどの高次元のデータへの対応と, より詳細なネットワークの解釈手法を提案することである.

参考文献

[1] A. Honda, Y. Okazaki, Theory of inclusion-exclusion integral, *Information Science*, **376**, pp. 136-147, 2017.

[2] 本田あおい, 包除積分数理モデルを用いた多変量データ解析, 知能と情報 (日本知能情報ファジィ学会誌) 解説論文, **30**, (4), pp. 183-192, 2018.

Pan積分の拡張と単調収束定理

大分大学　福田亮治
九州工業大学　本田 あおい
ファジィシステム研究所　岡崎 悦明

1. はじめに

単調測度とは，空集合では0となる単調性をもつ集合関数で，一般に加法性を満たさない。単調測度に関する積分は，各種定義されているが ([1, 2, 3, 4]) 一般にはどれも線形性が成り立たない。そのためもあり，測度論や関数解析における基本的性質がことごとく自明ではなくなる。その出発点でもある単調収束定理についても，それぞれ証明しなおす必要があり，現在までに多くの研究者により様々な結果が得られている。単調測度を我々は2つのタイプに分けて考える。一つはショケ積分や菅野積分のように分布関数を用いて定義する「分布関数型」, もう一つは単関数の基本和を用いて定義される「分割型」である。詳細は次節で説明するが,「分布関数型」の積分については，ほぼ一般に単調増加/減少収束定理が成り立っている。これらについては，河邊氏により詳細な解説がなされている。([1]) しかし分割型の積分に対しては，単関数で下から近似するタイプの積分では単調増加収束定理のみが，上から近似するタイプでは単調減少収束定理のみが示されている場合が多い。また，これらの積分は正の値を取る関数に限定されていることもあり，完全には対称性 (双対性) が成り立っておらず，不自然な状態であった。

この報告では，Pan 積分の定義を，負の値も取りうる関数まで拡張し，適当な条件の下で単調増加収束定理を示した。この積分の定義は，符号を変えることでSD積分の拡張になり，完全に対称性を持つようになった。これらの積分は，有限和の単関数を用いて定義されるため，Pan 積分の被積分関数は下に有界，SD積分の被積分関数は上に有界である。そこで単関数を，可算和に拡張した新たな，Pan積分を定義し，この積分に対しても，単調増加収束定理を示した。

Pan 積分の単調減少収束定理については，単調測度に条件を加えることでその十分条件を考える。 有限集合上の単調測度にに関するk-加法的測度は，メビウス変換という有限集合上の集合関数に関する考え方を用いるために，非離散化が自明ではない。ここでは，一般の可測空間上の単調測度に対してその概念を拡張する。 k-加法的測度に関しては，Pan 積分の単調減少収束定理を一定の条件下で示すことができる。

2. 単調測度と積分

2.1. 単調測度空間

$(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする。$\mathcal{B}$ 上の集合関数に対して，単調測度を次のように定義する。

定義 1 $(X, \mathcal{B})$ を可測空間, μ を $\mathcal{B}$ 上の関数が単調測度であるとは，次を満たすこととする。

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

単調測度は一般に加法性が成り立たない。人の感情に関わるものや，自然現象を記述する集合関数の中には，加法性が成り立たないものがあり，それらを大規模に扱い無

限集合上の集合関数に抽象化するとき，一般に無限集合に対する加法性を持たない集合関数を用いる必要が出てくる。 これらの多くは，そこで定義される関数に対する総合評価を与えるために何等かの積分を考える必要が生まれてきた。この報告でも，各種の積分を扱う。

2.2. 分布関数型積分

可測空間 $(X,\mathcal{B})$ 上に定義される単調測度 μ と非負可測関数 f に対して，
$\rho(r)=\mu(\{x : f(x)\geq r\})$ を分布関数と呼ぶ。この分布関数を用いて，次のように積分を定める。

$$
\begin{aligned}
\int^{\mathrm{ch}} f d\mu &= \int_0^{\infty} \rho(r)dr \quad (\text{Choquet 積分}) \\
\int^{\mathrm{su}} f d\mu &= \sup_r r\wedge\rho(r) \quad (\text{菅野積分}) \\
\int^{\mathrm{sh}} f d\mu &= \sup_r r\rho(r) \quad (\text{Shlkret 積分})
\end{aligned}
$$

これら積分は，分布関数型と呼ばれる。

2.3. 各種単関数族

分布関数型でない積分の多くは単関数に関する基本和を元に積分を定めている。 その単関数の取り方で性質が異なるため各種の積分が定義されている。 この小節では本報告で拡張するものも含めて単関数の集まりを扱う。

この報告で扱う単関数は，関数ではなく数値と集合のペアの列の集まりであり，次の種類を考える。 ここに基礎となる可測空間は $(X,\mathcal{B})$ であるとする。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \{(a_k,A_k)_{k=1}^n \ : a_k\geq 0,\ n\in\mathbb{N}, \{A_k\}\subset\mathcal{B}\} \\
\mathcal{S}' &= \{(a_k,A_k)_{k=1}^n \ : a_k\geq 0,\ n\in\mathbb{N}, \{A_k\}\subset\mathcal{B} \quad \text{は互いに素}\} \\
\mathcal{S}_* &= \{(a_k,A_k)_{k=1}^n \ ,\ a_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}, \{A_k\}\subset\mathcal{B}\} \\
\mathcal{S}'_* &= \{(a_k,A_k)_{k=1}^n \ :\ a_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}, \{A_k\}\subset\mathcal{B} \quad \text{は互いに素}\} \\
\mathcal{S}'_\mu &= \left\{(a_k,A_k)_{k=1}^\infty \ : \sum_{k=1}^\infty |a_k|\mu(A_k)<\infty, \{A_k\}\subset\mathcal{B} \quad \text{は互いに素}\right\}
\end{aligned}
$$

一つの単関数 $\varphi=(a_k,A_k)_k$ に対して，単調測度 μ に関する基本和を次で定める。

$$
\mu(\varphi)=\sum_k a_k\mu(A_k).
$$

φ を関数としてみるときは(通常の単関数のように),

$$
\varphi(x)=\sum_k a_k\chi_{A_k}(x),
$$

と定める。 ただし，単調測度には一般に加法性はないので，関数として同じでも，基本和が同じであるとは限らない。この意味で，単関数族は関数族としてはとらえないほうが良い。

2.4. 分割型積分各種

単調測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ および可測関数 f, 非負可測関数 f^+ が与えられているとき，次のように積分を定義する。

$$\begin{aligned}
\int^{\mathrm{pan}} f^+ d\mu &= \sup\{\mu(\varphi) : \varphi(x) \le f^+(x), \varphi \in \mathcal{S}'\} && \text{Pan 積分 1}\\
\int^{\mathrm{sd}} f^+ d\mu &= \inf\{\mu(\varphi) : \varphi(x) \ge f^+(x), \varphi \in \mathcal{S}'\} && \text{SD 積分 1}\\
\int^{\mathrm{cav}} f^+ d\mu &= \sup\{\mu(\varphi) : \varphi(x) \le f^+(x), \varphi \in \mathcal{S}\} && \text{凹積分 1}\\
\int^{\mathrm{vex}} f^+ d\mu &= \inf\{\mu(\varphi) : \varphi(x) \ge f^+(x), \varphi \in \mathcal{S}\} && \text{凸積分 1}\\
\int_*^{\mathrm{pan}} f d\mu &= \sup\{\mu(\varphi) : \varphi(x) \le f(x), \varphi \in \mathcal{S}'_*\} && \text{Pan 積分 2}\\
\int_*^{\mathrm{sd}} f d\mu &= \inf\{\mu(\varphi) : \varphi(x) \ge f(x), \varphi \in \mathcal{S}'_*\} && \text{SD 積分 2}\\
\int_*^{\mathrm{cav}} f d\mu &= \sup\{\mu(\varphi) : \varphi(x) \le f(x), \varphi \in \mathcal{S}_*\} && \text{凹積分 2}\\
\int_*^{\mathrm{vex}} f d\mu &= \inf\{\mu(\varphi) : \varphi(x) \ge f(x), \varphi \in \mathcal{S}_*\} && \text{凸積分 2}\\
\int_\sigma^{\mathrm{pan}} f d\mu &= \sup\{\mu(\varphi) : \varphi(x) \le f(x), \varphi \in \mathcal{S}'_\mu\} && \text{Pan 積分 3}
\end{aligned}$$

これらは，既存の積分に対して変更をしている．積分 1 は本来非負関数に対する定義で，単関数族は $\mathcal{S},\mathcal{S}'$ を用いたものだった ([5, 6, 7])。これを $\mathcal{S}_*,\mathcal{S}'_*$ に変えることで，符号を一般化したものである。このように定義することにより，Pan 積分 2 ⇔ SD 積分 2，凹積分 2 ⇔ 凸積分 2 の関係は，符号を入れ替えることで互いの積分に対応することになる。Pan 積分 3 は単関数を可算和に変えたものである。単関数が有限個の場合は，被積分関数は Pan 積分や凹積分の場合下に有界，SD 積分や凸積分の場合は上に有界にならざるを得なかった。この変更により，上下に非有界な関数を扱うことができるようになった。

3. 既存の収束定理

3.1. 分布関数型積分の収束定理

分布関数型の積分，Choquet 積分，菅野積分，Shilkret 積分については次に紹介するように，適当な条件の下単調増加/減少収束定理が，成り立っている。これらの性質については，さらに詳細な解析と共に河邊氏により調べられている ([1]) が，この報告では，以下で紹介する性質と関連ある次の定理のみにとどめる。

定理 2 単調増加収束定理
μ を下から連続である非加法的測度, 非負可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある非負可測関数 f に対して，$f_n \nearrow f$ を各点で満たすものとする. このとき次が成り立つ.

1. $\int^{\mathrm{ch}} f_n d\mu \nearrow \int^{\mathrm{ch}} f d\mu$ (Song, Li, Wang)

2. $\int^{\mathrm{su}} f_n d\mu \nearrow \int^{\mathrm{sh}} f d\mu$　(Lalesca,Adamus, Wang)

3. $\int^{\mathrm{sh}} f_n d\mu \nearrow \int^{\mathrm{sh}} f d\mu$　(Zhao)

定理 3 単調減少収束定理
μ を非加法的測度で上から条件連続 (減少集合列の測度が有限であれば上からの連続性がある) を満たすとする．非負可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある非負可測関数 f に対して，$f_n \searrow f$ を各点で満たすものとする. このとき次が成り立つ.

1. $\int^{\mathrm{ch}} f_1 d\mu < \infty \quad \Rightarrow \int^{\mathrm{ch}} f_n d\mu \searrow \int^{\mathrm{ch}} f d\mu$　(Wang)
2. $\int^{\mathrm{su}} f_n d\mu \searrow \int^{\mathrm{su}} f d\mu$　(Wang)
3. $\int^{\mathrm{sh}} f_n d\mu \searrow \int^{\mathrm{sh}} f d\mu$　(Zhao,Kawabe)

3.2. 分割型積分の収束定理

Pan 積分, 凹積分に関しては次のような単調増加収束定理が成り立つ。

定理 4 μ を下から連続な非加法的測度とする．非負可測関数列 $\{f_n\}$ が非負可測関数 f に単調増加で各点収束するとき $(f_n \nearrow f)$, 次が成り立つ。

$$\int^{\mathrm{pan}} f_n d\mu \nearrow \int^{\mathrm{pan}} f d\mu \quad as\ n \to \infty,$$

$$\int^{\mathrm{cav}} f_n d\mu \nearrow \int^{\mathrm{cav}} f d\mu \quad as\ n \to \infty,$$

ここで扱う積分は，非負関数を被積分関数とし，近似する単関数も非負の範囲で上限を与えている。これに対して，SD 積分 2，凸積分 2 に対する単調減少収束定理は，次の形で与えられていた。見かけ上同じよう見えるが，非負関数にしている影響で，若干状況が異なる。

定理 5 $f_n \searrow f$ を満たす可測関数列 $\{f_n\}$ と可測関数 f に対して, 非加法的測度 μ が, 上から条件連続, 下から連続で，$\int^{\mathrm{sd}} f_1 d\mu < \infty$, $\left(\int^{\mathrm{vex}} f_1 d\mu < \infty \right)$ を満たせば，次が成り立つ。

$$\int^{\mathrm{sd}} f_n d\mu \searrow \int^{\mathrm{sd}} f d\mu, \quad \left(\int^{\mathrm{vex}} f_n d\mu \searrow \int^{\mathrm{vex}} f d\mu\right).$$

単関数が有限和で，下限により積分が定義されているので，積分が有限になるという条件は，有界を意味する。もともと非負の関数が対象なので，この場合上下に一様有界な関数列を扱っていることになる。

4. 拡張した積分の収束定理

4.1. 符号を一般化した場合の収束定理

単関数や近似関数に負の値を許す場合，次のように Pan 積分や 凹積分の単調増加束定理を示すことができる。

定理 6 μ を下から連続な非加法的測度とする．可測関数列 $\{f_n\}$ が非負可測関数 f に単調増加で各点収束するとき $(f_n \nearrow f)$, $\{f_n\}$ が下に有界であれば，次が成り立つ。

$$\int^{\text{pan}} f_n d\mu \nearrow \int^{\text{pan}} f d\mu \quad as\ n \to \infty,$$

$$\int^{\text{cav}} f_n d\mu \nearrow \int^{\text{cav}} f d\mu \quad as\ n \to \infty,$$

この定理の条件である「下に有界」という性質は，下からおさえる単関数の存在を意味する。また，符号を変えることで上に有界な場合の SD 積分，凸積分の単調減少収束定理も成り立つ。

4.2. 無限和を許した場合の収束定理

単関数族を，可算和に変えた場合も同様の定理が成り立つ。

定理 7 μ を下から連続な非加法的測度とする．可測関数列 $\{f_n\}$ が非負可測関数 f に単調増加で各点収束するとする $(f_n \nearrow f)$. ある $\varphi \in \mathcal{S}'$, に対して，$f_n \geq \varphi, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ が成り立てば，次が成り立つ.

$$\int_{\sigma}^{\text{pan}} f_n d\mu \nearrow \int_{\sigma}^{\text{pan}} f d\mu \quad as\ n \to \infty,$$

4.3. 構成的 k-加法的測度

有限集合上の単調測度に対して定義される k-加法的測度は，メビウス変換 (反転) を用いて定義されるが，一般に非離散的な集合に対しては，そこから類推した構成的定義を与える。定義を記述するために，次の集合演算を定める。可測空間 $(X, \mathcal{B})$ に対して $X^{(j)} = \{\{x_1, x_2, .., x_j\} \subset X : x_i \neq x_\ell,\ i \neq \ell\}$ と置く。 この空間は，直積と並べ替えの同一視 (商空間) に対応する σ-集合体を考え，可測空間とする。また，$A \in \mathcal{B}$ に対して，$A^{(j)} = \{\{x_1, x_2, .., x_j\} \subset A : x_i \neq x_\ell,\ i \neq \ell\}$ と定めると上の意味で可測集合になる。

定義 8 可測空間 $(X, \mathcal{B})$ 上の単調測度 μ が，構成的な k-加法的測度であるとは，$j = 1, 2, \ldots, k$ に対して $X^{(j)}$ 上の実測度 μ_j が存在して $\mu(A) = \sum_{j=1}^{k} \mu_j(A^{(j)})$ を満たすこととする。

各 μ_j は実測度なので，μ は有限個の有界な測度の和であらわされる事になり，単調測度として有界であることになる。

4.4. Pan 積分の単調減少収束定理

Pan 積分に対しては，単調減少収束定理は極限られた状況でしか示されていない。現時点で， μ が劣加法的である場合，及び関数列が 0 に各点収束する場合に $\int^{\text{pan}}$ の積分について単調減少収束定理が示されている ([4]) . これに加えて次の定理を示すことができる。

定理 9 μ を構成的な k-加法的測度とする．可測関数列 $\{f_n\}$ が非負可測関数 f に単調増加で各点収束するとする $(f_n \searrow f)$. さらに，$f_1, f_n (n = 1, 2, ...)$ が一様に有界 $(\exists M > 0$ $s.t.\ |f_1|, |f_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N})$ であれば次が成り立つ.

$$\int_{\sigma}^{\text{pan}} f_n(x) d\mu \searrow \int_{\sigma}^{\text{pan}} f(x) d\mu.$$

σ-加法的測度に関する有界収束定理は，容易に優収束定理に拡張することができる．この場合も，同様の議論ができなくはないが，その場合に得られる条件は，単調測度 μ に関する可積分性ではなく，$\sum|\mu_j|$ に関するか積分性になり，これを元の μ に関する性質としてとらえるのは容易ではない．

5. まとめ

一般に，単調測度に関する積分は，上下の非対称性があって扱いにくいものである．これは分布関数型でも似たようなもので，それぞれにそれをどう回避するかが問題になる．分割型の積分では，この報告で定義したように単関数族を整理することで，下から近似する Pan 積分, 凹積分 と 上から近似する SD 積分, 凸積分の双対的な構造を作ることができた．しかし収束定理に関しては相変わらず，片方向の物しか一般的には得られていない．これに対して k-加法性を非離散化することで，単調減少収束定理の十分条件を得ることができた．かなり強い条件ではあるが，有限集合上の単調測度はすべて含むため，劣加法性や優加法性といった性質に関しては，一般的な状況を与えうるとも見ることができる．今後，有限集合上の単調測度を用いた解析は，これを足掛かりにさまざまな一般化が期待できるものと考えている．

参考文献

[1] 河邊　淳，非線形積分の収束定理の統一的定式化，第 56 回実函数論・関数解析学合同シンポジウム講演集，pp.35–54，2017.

[2] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 非分布関数型ファジィ積分に関する収束定理, 数理解析研究所考究録 2112 「非線形解析学と凸解析学の研究」, pp.134-140,2019

[3] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 非加法的単調測度による弱凸積分と単調収束定理実解 析学シンポジウム 2018 報告集,pp.97-102，2018

[4] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 分割型非線形積分の収束定理 (解説論文), 知能と情報 (日本知能情報ファジィ学会誌)Vol.31,No.4,pp.108-115,2019

[5] Q. Yang, The pan-integral on the fuzzy measure space, Fuzzy Mathematica (in Chinese), 3 (1985), pp. 107-114.

[6] E. Lehrer, A new integral for capacities, Econ. Theory, 39, 157-176, 2009.

[7] R. Mesiar, J. Li, E. Pap, Superdecomposition integrals, Fuzzy Sets and Systems, 259, 3-11, 2015.

フォン・ノイマン環の前双対における Birkhoff直交性の左対称点について

田中 亮太朗 (東京理科大), 小室 直人 (北教大旭川), 斎藤 吉助 (新潟大)

1 序文

本論文では、Birkhoff 直交性の局所対称性について述べる。特に、フォン・ノイマン環の前双対を中心に扱う。

バナッハ空間の幾何学では、ヒルベルト空間における直交性を多様な方法で一般化することで、互いに直交するベクトルが持つであろう幾何的な情報をバナッハ空間の解析に役立ててきた。中でも、単位球の接超平面や最短距離の概念と関係の深い Birkhoff 直交性は、古くから研究され、今なお興味深い結果を生み出し続けている重要な概念である。

定義 1.1 (Birkhoff 直交性 [2]). X を $\mathbb{K}$ 上のバナッハ空間とし、$x, y \in X$ とする。そのとき、x が y に Birkhoff 直交するとは、$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ がすべてのスカラー $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して成立することをいい、$x \perp_B y$ で表される。

Birkhoff 直交性は、1935 年に Birkhoff [2] により導入され、後に James [5, 6] により種々の重要な性質が研究されたことから、Birkhoff-James 直交性などとも呼ばれている。単純な計算から、ヒルベルト空間においては、内積から定まる通常の直交性 $\perp$ と Birkhoff 直交性 $\perp_B$ とは同値であることがわかる。また、関係 $\perp_B$ は、その定義から同次性（homogeneity）を持つ。つまり、$x \perp_B y$ であれば、任意のスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して $\alpha x \perp_B \beta y$ が成立する。一方で、$\perp_B$ はほとんどの場合で対称性（symmetry）を持たない。実際、3 以上の次元を持つバナッハ空間で、「$x \perp_B y$ ならば $y \perp_B x$」が成立するものはヒルベルト空間しかないことが知られている（[6]）。

James により上述の強力な定理が示されてからは、長い間、Birkhoff 直交性の対称性そのものに着目した研究は行われてこなかった。しかし、2005 年に Turnšek [13] が $\perp_B$ の局所対称性に関する面白い考察を与えてからは、Arambašić-Rajić [1]、Sain [11]、Sain-Ghosh-Paul [12] 等が関連研究に次々に参入し、現在では、Birkhoff 直交性の局所対称性は活発な研究領域へと発展を遂げている。

本論文における Birkhoff 直交性の局所対称性とは、正確には次のことを指す。

定義 1.2 (Sain [11]). X を $\mathbb{K}$ 上のバナッハ空間とし、$x \in X$ とする。そのとき、x が Birkhoff 直交性に関して左対称であるとは、$y \in X$ かつ $x \perp_B y$ ならば $y \perp_B x$ が成立することを言う。

定義 1.3 (Sain [11]). X を $\mathbb{K}$ 上のバナッハ空間とし、$x \in X$ とする。そのとき、x が Birkhoff 直交性に関して右対称であるとは、$y \in X$ かつ $y \perp_B x$ ならば $x \perp_B y$ が成立することを言う。

これらに関する研究は、特に 2010 年代に入ってから急速に発展し、興味深い結果が数多く報告されている（例えば、[3, 4, 10, 12] を参照されたい）。また、ヒルベルト空間上の有界線形作用素に関しては、Turnšek [13, 14] により次が示されている。

定理 (Turnšek [14])**.** H を複素ヒルベルト空間とし、$B(H)$ を H 上の有界線形作用素の全体が成すバナッハ空間とする。そのとき、$B(H)$ は 0 以外の Birkhoff 直交性に関する左対称点を持たない。

定理 (Turnšek [13])**.** H を複素ヒルベルト空間とする。そのとき、$A \in B(H)$ が Birkhoff 直交性に関して右対称となるための必要十分条件は、それが等距離作用素（isometry）または余等距離作用素（coisometry）のスカラー倍となることである。

等距離作用素と余等距離作用素は、$B(H)$ の単位球の端点（extreme point）であることが知られている（[7, Corollary 6.1.9, Theorem 7.3.1]）。従って、後者の結果からは、特定の場合において、Birkhoff 直交性の局所対称性が単位球の端点構造等、既存の幾何概念を説明し得ることがわかる。

また、良く知られているように、$B(H)$ はフォン・ノイマン環の典型例である。2018 年には、フォン・ノイマン環の枠組みで Turnšek の仕事を正当に一般化した結果が [8] に報告されている。正確には、次が示された。

定理 ([8])**.** $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とする。そのとき、$A \in B(H)$ が Birkhoff 直交性に関して左対称となるための必要十分条件は、それが中心的（central）かつ極小（minimal）な射影のスカラー倍となることである。

定理 ([8])**.** $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とする。そのとき、$A \in B(H)$ が Birkhoff 直交性に関して右対称となるための必要十分条件は、それが $\mathcal{R}$ の単位球の端点のスカラー倍となることである。

このように、フォン・ノイマン環の設定では、Birkhoff 直交性の局所対称性は幾何的あるいは代数的条件を用いて整然と記述される。今後は、これらの定理を参考に、フォン・ノイマン環に関連の強いバナッハ空間においても Birkhoff 直交性の局所対称性を詳らかにしていきたい。本論文では、その試みの第一歩として、フォン・ノイマン環に付随して現れる前双対において、Birkhoff 直交性の左対称点を明らかにする。

2 準備

X をバナッハ空間としたとき、B_X は X を単位球を、S_X は X の単位球面を表す。また、X^* は X の（ノルム位相に関する）双対空間を表す。

H をヒルベルト空間とする。各 $x, y \in H$ に対して、$B(H)$ 上の線形汎関数 $\omega_{x,y}$ を $\omega_{x,y}(A) = \langle Ax, y\rangle$ により定める。$B(H)$ 上の関数族 $\{\omega_{x,y} : x, y \in H\}$ から定まる弱位相は、弱作用素位相（weak-opeartor topology）と呼ばれる。フォン・ノイマン環とは、弱作用素位相に関して閉な $B(H)$ の部分 C^* 代数のことである。フォン・ノイマン環 $\mathcal{R}$ 上の線形汎関数 ρ が正規（normal）であるとは、それが $B_{\mathcal{R}}$ 上で弱作用素連続なことを言う。フォン・ノイマン環 $\mathcal{R}$ の前双対 $\mathcal{R}_*$ とは、$\mathcal{R}$ の正規線形汎関数の全体が成す $\mathcal{R}^*$ の部分空間のことである。

フォン・ノイマン環の前双対の典型例としては、ℓ_1 や $\mathcal{C}_1$（トレースクラス作用素の全体）が挙げられる。$(\ell_1)^* = \ell_\infty$ は可換なフォン・ノイマン環（として表現可能）であり、$\mathcal{C}_1^* = B(H)$ である。

3 考察

フォン・ノイマン環の前双対における Birkhoff 直交性の左対称点を理解するためには、有限次元かつ実数体上の ℓ_1 における考察が重要な役割を果たす。$\ell_1^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ とおく。ここで、

$$\|(a_1, a_2, \ldots, a_n)\| = \sum_{j=1}^{n} |a_j|$$

である。また、$(\ell_1^n)^* = \ell_\infty^n$ であり、$f \in (\ell_1^n)^*$ と $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \ell_\infty^n$ が同一視されたとき、その作用は

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

で与えられる。

具体的な計算のため、次を用いる。

補題 3.1 (James [5]). X を $\mathbb{K}$ 上のバナッハ空間とし、$x, y \in X$ とする。そのとき、$x \perp_B y$ であることと、ある $f \in S_{X^*}$ が存在して、$f(x) = \|x\|$ かつ $f(y) = 0$ となることとは同値である。

我々の議論は、実際には、2 次元と 3 次元の場合が本質である。まずは 2 次元の場合を見てみよう。

補題 3.2. ℓ_1^2 の元 (a, b) が Birkhoff 直交性に関して左対称となるための必要十分条件は、$|a| = |b|$ となることである。

証明. Birkhoff 直交性は同次性を持つから、$\|(a, b)\|_1 = |a| + |b| = 1$ としてよい。また、Birkhoff 直交性は等距離作用素で保存されるから、一般性を失うことなく、$a \geq b \geq 0$ としてよい。まず、(a, b) は Birkhoff 直交性に関して左対称であるとしよう。このとき、$f = (1, 1) \in (\ell_1^2)^*$ とすると $\|f\|_\infty = 1$、$f(a, b) = a + b = 1$ かつ $f(-1, 1) = 0$ より、ℓ_1^2 において $(a, b) \perp_B (-1, 1)$ である。よって、(a, b) の左対称性から $(-1, 1) \perp_B (a, b)$ である。従って、

$$2 = \|(-1, 1)\|_1 \leq \|(-1, 1) + 2^{-1}(a, b)\|_1 = |2^{-1}a - 1| + |2^{-1}b + 1| = 2 - 2^{-1}a + 2^{-1}b$$

となり、これを整理すれば $a \leq b$ を得る。つまり、$a = b$ が成立する。

逆に、もし $a = b$ なら、$(a, b) = (2^{-1}, 2^{-1})$ であるが、このとき、$\|g\|_\infty = g(a, b) = 1$ を満たす $g \in (\ell_1^2)^*$ は $g = (1, 1)$ のみである。よって、$(a, b) \perp_B (c, d)$ ならば $g(c, d) = 0$、すなわち、$(c, d) = c(-1, 1)$ でなければならない。このとき、三角不等式から

$$\|(-1, 1) + \lambda(2a, 2b)\|_1 = |1 - \lambda| + |1 + \lambda| \geq 2 = \|(-1, 1)\|_1$$

となるから、Birkhoff 直交性の同次性より $(c, d) \perp_B (a, b)$ がわかる。よって、(a, b) は Birkhoff 直交性に関して左対称である。 □

次に 3 次元の場合を見よう。

補題 3.3. ℓ_1^3 の元 (a,b,c) で Birkhoff 直交性に関して左対称となるものは、$(0,0,0)$ のみである。

証明. 対偶を示すため、$(a,b,c) \neq (0,0,0)$ とする。2 次元の場合の証明の冒頭と同様にして、$\|(a,b,c)\|_1 = 1$ かつ $a \geq b \geq c \geq 0$ としてよい。汎関数 $f = (1,1,1) \in (\ell_1^2)^*$ について、$\|f\|_\infty = 1$ かつ $f(a,b,c) = a+b+c = 1$ である。また、$f(4^{-1}, 4^{-1}, -2^{-1}) = 0$ より、ℓ_1^3 において $(a,b,c) \perp_B (4^{-1}, 4^{-1}, -2^{-1})$ である。一方、$g(4^{-1}, 4^{-1}, -2^{-1}) = \|(4^{-1}, 4^{-1}, -2^{-1})\|_1 = 1$ を満たす $g \in (\ell_1^3)^*$ は $g = (1,1,-1)$ のみであるから、$(4^{-1}, 4^{-1}, -2^{-1}) \perp_B (a,b,c)$ であるためには、$g(a,b,c) = 0$ でなければならない。しかし、

$$g(a,b,c) = a + (b - c) > 0$$

であるから、これは起こり得ない。従って、(a,b,c) は ℓ_1^3 において Birkhoff 直交性の左対称点とならない。 □

フォン・ノイマン環では、Birkhoff 直交性の左対称点は、中心的かつ極小な射影という代数的な条件により特徴付けられたが、フォン・ノイマン環の前双対においては、補題 3.2 と補題 3.3 が示すように、単純に 2 次元と 3 次元との違いが本質である。これらの議論は、然るべき修正を加えた後、一般の場合にも適用される。

4 主結果

先の考察の結果（補題 3.3）を改良することにより、フォン・ノイマン環の前双対においては次が成立することがわかる。

補題 4.1. $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とする。もし、前双対 $\mathcal{R}_*$ が 0 でない Birkhoff 直交性に関する左対称点を持つなら、$\mathcal{R}$ 中に存在する直交射影族の濃度は高々3 である。

フォン・ノイマン環はその射影族の閉線形包として書けるから、この補題により、前双対が非自明な Birkhoff 直交性に関する左対称点を持つフォン・ノイマン環は $\mathbb{C}$、ℓ_∞^2 および $M_2(\mathbb{C})$（2×2 の複素行列の成す代数）に限られることがわかる。これと補題 3.2 の議論の応用により、本論文の主定理を得る。

定理 4.2 ([9])**.** $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とする。もし、その前双対 $\mathcal{R}_*$ が Birkhoff 直交性に関する左対称点で 0 でないものを持つなら、次のいずれかが成立する。

(i) $\mathcal{R} = \mathbb{C}$ であり、$\mathcal{R}_* = \mathbb{C}$ の各点が Birkhoff 直交性の左対称点となる。

(ii) $\mathcal{R} = \ell_\infty^2$ であり、$\rho \in \mathcal{R}_* = \ell_1^2$（$\rho \neq 0$）が Birkhoff 直交性に関する左対称点であることと、$\|\rho\|^{-1}\rho \in \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : |a| = |b| = 1/2\}$ とは同値である.

(iii) $\mathcal{R} = M_2(\mathbb{C})$ であり、$\rho \in \mathcal{R}_* = (M_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$（$\rho \neq 0$）が Birkhoff 直交性に関する左対称点であることと、$\|\rho\|^{-1}\rho \in \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \sigma_1 = \sigma_2 = 1/2\}$ とは同値である。ここで、σ_1, σ_2 は A の特異値を表す。

参考文献

[1] Arambašić and Rajić, *On symmetry of the (strong) Birkhoff-James orthogonality in Hilbert C^*-modules*, Ann. Funct. Anal., **7** (2016), 17–23.

[2] G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J., **1** (1935), 169–172.

[3] P. Ghosh, K. Paul and D. Sain, *Symmetric properties of orthogonality of linear operators on* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, Novi Sad J. Math., **47** (2017), 41–46.

[4] P. Ghosh, D. Sain and K. Paul, *On symmetry of Birkhoff-James orthogonality of linear operators*, Adv. Oper. Theory, **2** (2017), 428–434.

[5] R. C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **61** (1947), 265–292.

[6] R. C. James, *Inner product in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 559–566.

[7] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II*, Advanced theory. Pure and Applied Mathematics, **100**, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.

[8] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *Symmetric points for (strong) Birkhoff orthogonality in von Neumann algebras with applications to preserver problems*, J. Math. Anal. Appl., **463** (2018), 1109–1131.

[9] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *Left symmetric points for Birkhoff orthogonality in the preduals of von Neumann algebras*, Bull. Aust. Math. Soc., **98** (2018), 494–501.

[10] K. Paul, A. Mal and P. Wójcik, *Symmetry of Birkhoff-James orthogonality of operators defined between infinite dimensional Banach spaces*, Linear Algebra Appl., **563** (2019), 142–153.

[11] D. Sain, *Birkhoff-James orthogonality of linear operators on finite dimensional Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **447** (2017), 860–866.

[12] D. Sain, P. Ghosh and K. Paul, *On symmetry of Birkhoff-James orthogonality of linear operators on finite-dimensional real Banach spaces*, Oper. Matrices, **11** (2017), 1087–1095.

[13] A. Turnšek, *On operators preserving James' orthogonality*, Linear Algebra Appl., **407** (2005), 189–195.

[14] A. Turnšek, *A remark on orthogonality and symmetry of operators in* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, Linear Algebra Appl., **535** (2017), 141–150.

Day-James 空間における幾何学的定数について

岡山県立大学・情報工学部　三谷健一（Ken-Ichi Mitani）
Okayama Prefectural University

新潟大学・自然科学系　斎藤吉助（Kichi-Suke Saito）
Niigata University

概 要

Day-James 空間 ℓ_p-ℓ_q における幾何学的定数の計算に関する最近の結果を述べる。特に von Neumann-Jordan 定数 (以下, NJ 定数) を考える。この空間における NJ 定数の値に関しては，2001 年に加藤-Maligranda-高橋 [3] が未解決問題として取り上げて以降，Yang らによって精力的に研究されている ([2, 10, 11, 12, 13]) 。

本研究では Banach-Mazur 距離を用いた ℓ_p-ℓ_q における NJ 定数の計算方法を紹介する。

Definition 1 Let X be a Banach space. The NJ-constant $C_{\mathrm{NJ}}(X)$ is the smallest constant C for which

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)} \leq C$$

holds for all $x, y \in X$ not both 0 ([1]).

言い換えると

$$C_{\mathrm{NJ}}(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)} : x \in S_X,\ y \in B_X\right\},$$

ここで, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

$C_{\mathrm{NJ}}(X)$ の主な性質は次の通りである。

Proposition 1 (cf. [3]) (i) $1 \leq C_{\mathrm{NJ}}(X) \leq 2$ for all Banach spaces X

(ii) X is a Hilbert space if and only if $C_{\mathrm{NJ}}(X) = 1$

(iii) $C_{\mathrm{NJ}}(L_p) = 2^{2/\min\{p,p'\}-1}$, where $1/p + 1/p' = 1, 1 \leq p \leq \infty$

(iv) X is uniformly non-square if and only if $C_{\mathrm{NJ}}(X) < 2$

(v) $C_{\mathrm{NJ}}(X) = C_{\mathrm{NJ}}(X^*)$ for all Banach spaces X.

本研究では Day-James 空間を考察する。

Definition 2 (cf. [3]) Let $1 \leq p, q \leq \infty$. The Day-James ℓ_p-ℓ_q space is the space $\mathbb{R}^2$ with the norm $\|\cdot\|_{p,q}$ defined by

$$\|(x,y)\|_{p,q} = \begin{cases} \|(x,y)\|_p, & xy \geq 0, \\ \|(x,y)\|_q, & xy \leq 0, \end{cases}$$

where $\|\cdot\|_p$ is the ℓ_p-norm on $\mathbb{R}^2$.

この空間の NJ 定数に関して，2001 年に加藤-Maligranda-高橋 [3] が open problem として取り上げたが, Yang-Wang によって次が得られた。

Theorem 2 ([12], cf. [2])

$$C_{\mathrm{NJ}}(\ell_2\text{-}\ell_1) = \frac{3}{2}. \tag{1}$$

彼らはこれを計算するため次の関数を導入した。X をバナッハ空間とする。このとき

$$\gamma_X(t) = \sup\left\{\frac{\|x+ty\|^2 + \|x-ty\|^2}{2} : x, y \in S_X\right\}$$

とおく。$C_{\mathrm{NJ}}(X)$ は $\gamma_X(t)$ を用いて次のように表すことができる。

$$C_{\mathrm{NJ}}(X) = \sup\left\{\frac{\gamma_X(t)}{1+t^2} : 0 \leq t \leq 1\right\} \tag{2}$$

彼らは $X = \ell_2$-ℓ_1 のとき $\gamma_X(t) = 1 + t + t^2$ を計算し, (2) に代入することで, (1) を得た。同様の方法により ℓ_p-ℓ_1 に関して Yang らにより次が得られている。

Theorem 3 ([10, 11, 12, 13]) (i) If either $1 \leq p \leq 2$, or $p > 2$ and $(p-2)2^{2/p-2} < 1$ then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_1) = 1 + 2^{2/p-2}.$$

(ii) If $p > 2$ and $(p-2)2^{2/p-2} \geq 1$, then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_1) = \frac{1}{2} + \frac{1-t_0^p}{2(t_0 - t_0^{p-1})},$$

where $t_0 \in (0,1)$ is the unique solution to the equation

$$\frac{(t-t^{p-1})(1+t^p)^{2/p-1}}{1-t^2} = 1.$$

In particular,

$$C_{\mathrm{NJ}}(\ell_\infty\text{-}\ell_1) = \frac{3+\sqrt{5}}{4}.$$

本研究では, Day-James 空間 ℓ_p-ℓ_q における NJ 定数を計算する。ここで $q=1$ とは限らないことに注意する。 計算方法として Banach-Mazur 距離を用いる。

Definition 3 For isomorphic Banach spaces X and Y, the Banach-Mazur distance between X and Y, denoted by $d(X,Y)$, is defined to be the infimum of $\|T\| \cdot \|T^{-1}\|$ taken over all bicontinuous linear operators T from X onto Y (cf. [9]).

Lemma 4 ([3]) If X and Y are isomorphic Banach spaces, then

$$\frac{C_{\mathrm{NJ}}(X)}{d(X,Y)^2} \leq C_{NJ}(Y) \leq C_{\mathrm{NJ}}(X) d(X,Y)^2.$$

In particular, if X and Y are isometric, then $C_{\mathrm{NJ}}(X) = C_{\mathrm{NJ}}(Y)$.

Lemma 5 ([3]) Let $X = (X, \|\cdot\|)$ be a non-trivial Banach space and let $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, where $\|\cdot\|_1$ is an equivalent norm on X satisfying, for $\alpha, \beta > 0$,

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|, \quad x \in X.$$

Then

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} C_{\mathrm{NJ}}(X) \leq C_{\mathrm{NJ}}(X_1) \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2} C_{\mathrm{NJ}}(X).$$

上の補題を用いて，2 次元空間の absolute ノルムにおける NJ 定数に関する次の結果を得る。簡単のため $C_{\mathrm{NJ}}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|))$ を $C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|)$ とかく。

Definition 4 A norm $\|\cdot\|$ on $\mathbb{R}^2$ is said to be absolute if $\|(|x|,|y|)\| = \|(x,y)\|$ for any $x, y \in \mathbb{R}$.

Theorem 6 ([5, 6], cf. [7]) Let $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_H$ be absolute norms on $\mathbb{R}^2$. Assume that
(i) $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_H)$ is an inner product space.
(ii) $\alpha\|(x,y)\|_H \leq \|(x,y)\|_X \leq \beta\|(x,y)\|_H$ for any $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (α, β are the best constants).
(iii) In (ii) it satisfies either $\alpha\|(1,0)\|_H = \|(1,0)\|_X$ and $\alpha\|(0,1)\|_H = \|(0,1)\|_X$, or $\beta\|(1,0)\|_H = \|(1,0)\|_X$ and $\beta\|(0,1)\|_H = \|(0,1)\|_X$.
Then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|_X) = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

この定理を用いて, ℓ_p-ℓ_q における NJ 定数を計算する。$1 \leq q < p < \infty$ に対し, $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|_X$ を

$$\|(x,y)\|_X = \|T(x,y)\|_{p,q} = \begin{cases} \|T(x,y)\|_p, & |x| \geq |y|, \\ \|T(x,y)\|_q, & |x| \leq |y|, \end{cases}$$

とおく, ここで $T(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y)$。$C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_q) = C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|_X)$ であるから $C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|_X)$ を計算すれば十分である。このノルムに対して $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|_H$ を

$$\|(x,y)\|_H = \sqrt{2^{2/p-1}x^2 + 2^{2/q-1}y^2} \quad (1 \leq q < p < \infty)$$

とおく。明らかに $\|\cdot\|_X$ と $\|\cdot\|_H$ は absolute であり Theorem 6 の (i), (ii), (iii) ($\beta = 1$ に関して) をみたす。Theorem 6 を適用することにより次を得る。

Theorem 7 ([6]) If $1 \leq q \leq 2, q \leq p < \infty$ and $2^{2/p-2/q}(p-1) \leq 1$, then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_q) = \frac{2^{2/p}(t_0^2 + 2^{2/q-2/p})}{((1+t_0)^q + (1-t_0)^q)^{2/q}}. \tag{3}$$

where

$$t_0 = \sup\left\{t \in (0,1) : \frac{(2^{2/q-2/p} - t)(1+t)^{q-1}}{(2^{2/q-2/p} + t)(1-t)^{q-1}} \leq 1\right\}.$$

In particular, if $1 \leq q \leq p \leq 2$, then (3) holds.

Corollary 8 ([10, 11, 13]) If either $1 \leq p \leq 2$, or $p > 2$ and $2^{2/p-2}(p-1) \leq 1$, then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_1) = 1 + 2^{2/p-2}.$$

Remark 1 Let $1 \leq q \leq 2, q \leq p < \infty$ and $2^{2/p-2/q}(p-1) \leq 1$. If H is an inner product space with $\dim H = 2$, then

$$d(\ell_p\text{-}\ell_q, H) = \sqrt{C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_q)}.$$

von Neumann-Jordan 定数を一般化した von Neumann-Jordan 型定数は [8] によって定義された。上記と同様な方法により Day-James 空間における von Neumann-Jordan 型定数も計算することができる ([4])。

参考文献

[1] J. A. Clarkson, *The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space*, Ann. of Math. **38** (1937), 114-115.

[2] S. Dhompongsa, P. Piraisangjun, S. Saejung, *Generalised Jordan-von Neumann constants and uniform normal structure*, Bull. Austral. Math. Soc. **67** (2003), 225-240.

[3] M. Kato, L. Maligranda, Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math. **144** (2001), 275-295.

[4] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, *Geometrical constants of Day-James spaces*, to appear in RIMS kokyuroku.

[5] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, Y. Takahashi, *On the von Neumann-Jordan constant of generalized Banaś-Frączek spaces*, Linear Nonlinear Anal. **2** (2016), 311-316.

[6] K.-I. Mitani, Y. Takahashi, K.-S. Saito, *On von Neumann-Jordan constant of* ℓ_p-ℓ_q *spaces,* J. Nonlinear Conv. Anal. **19** (2018), 1705-1709.

[7] K.-S. Saito, M. Kato, Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl. **244** (2000), 515-532.

[8] Y. Takahashi, *Some geometric constants of Banach spaces-a unified approach*, Banach and function spaces II, 191-220, Yokohama Publ., Yokohama, 2008.

[9] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach-Mazur Distances and Finite Dimensional Operator Ideals*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 38, Longman, New York 1989.

[10] C. Yang, *An inequality between the James type constant and the modulus of smoothness*, J. Math. Anal. Appl. **398** (2013), 622-629.

[11] C. Yang, H. Li, *On the James type constant of* ℓ_p-ℓ_1, J. Inequal. Appl. **2015**: Article ID 79 (2015).

[12] C. Yang, F. Wang, *On a new geometric constant related to the von Neumann-Jordan constant*, J. Math. Anal. Appl. **324** (2006), 555-565.

[13] C. Yang, F. Wang, *The von Neumann-Jordan constant for a class of Day-James Spaces*, Mediterr. J. Math. **13** (2016), 1127-1133.

FIXED POINT, ABSOLUTE FIXED POINTS AND CONVERGENCE THEOREMS FOR NONLINEAR MAPPINGS

SACHIKO ATSUSHIBA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF EDUCATION, UNIVERSITY OF YAMANASHI

Abstract. In this paper, using the idea of attractive points of nonlinear mappings and the concept of the mean, we prove convergence theorems for nonexpansive semigroups.

1. Introduction

Let H be a real Hilbert space with inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and norm $\|\cdot\|$ and let C be a nonempty subset of H. For a mapping $T : C \to H$, we denote by $F(T)$ the set of *fixed points* of T and by $A(T)$ the set of *attractive points* [15] of T, i.e.,

(i) $F(T) = \{z \in C : Tz = z\}$;
(ii) $A(T) = \{z \in H : \|Tx - z\| \leq \|x - z\|, \ \forall x \in C\}$.

A mapping $T : C \to C$ is called nonexpansive if $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ for all $x, y \in C$. In 1975, Baillon [5] proved the following first nonlinear ergodic theorem in a Hilbert space: Let C be a nonempty bounded closed convex subset of a Hilbert space H and let T be a nonexpansive mapping of C into itself. Then, for any $x \in C$, $S_n x = \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x$ converges weakly to a fixed point of T (see also [14]).

Motivated by Baillon [5], and Kocourek, Takahashi and Yao [8], Takahashi and Takeuchi [15] introduced the concept of attractive points of a nonlinear mapping in a Hilbert space and they proved a mean convergence theorem of Baillon's type without convexity for a generalized hybrid mapping.

In this paper, using the idea of attractive points of nonlinear mappings and the concept of the mean, we prove convergence theorems for nonexpansive semigroups.

2. Preliminaries and notations

Throughout this paper, we assume that E is a real Banach space with norm $\|\cdot\|$. We denote by E^* the topological dual space of E. We denote by $\mathbb{N}$ and $\mathbb{R}$ the set of all positive integers and the set of all real numbers, respectively. We also denote by $\mathbb{R}^+$ the set of all nonnegative real numbers. We write $x_n \to x$ (or $\lim_{n\to\infty} x_n = x$) to indicate that the sequence $\{x_n\}$ of vectors in E converges strongly to x. We also write $x_n \rightharpoonup x$ (or w-$\lim_{n\to\infty} x_n = x$) to indicate that the sequence $\{x_n\}$ of vectors in E converges weakly to x. We also denote by $\langle y, x^* \rangle$ the value of $x^* \in E^*$ at $y \in E$. For a subset A of E, $\mathrm{co}A$ and $\overline{\mathrm{co}}A$ mean the convex hull of A and the closure of convex hull of A, respectively.

A Banach space E is said to be strictly convex if $\dfrac{\|x+y\|}{2} < 1$ for $x, y \in E$ with $\|x\| = \|y\| = 1$ and $x \neq y$. In a strictly convex Banach space, we have that if $\|x\| = \|y\| = \|(1-\lambda)x + \lambda y\|$ for $x, y \in E$ and $\lambda \in (0,1)$, then $x = y$. For every ε with $0 \leq \varepsilon \leq 2$, we define the modulus $\delta(\varepsilon)$ of convexity of E by

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} \ : \ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

A Banach space E is said to be uniformly convex if $\delta(\varepsilon) > 0$ for every $\varepsilon > 0$. If E is uniformly convex, then for r, ε with $r \geq \varepsilon > 0$, we have $\delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) > 0$ and

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq r\left(1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right)$$

for every $x, y \in E$ with $\|x\| \leq r$, $\|y\| \leq r$ and $\|x-y\| \geq \varepsilon$. It is well-known that a uniformly convex Banach space is reflexive and strictly convex.

Let S be a semitopological semigroup, i.e., S is a semigroup with a Hausdorff topology such that for each $a \in S$ the mappings $s \mapsto a \cdot s$ and $s \mapsto s \cdot a$ from S to S are continuous. In the case when S is commutative, we denote st by $s+t$. Let $B(S)$ be the Banach space of all bounded real-valued functions defined on S with supremum norm. For each $s \in S$ and $g \in B(S)$, we can define an element $\ell_s g \in B(S)$ by $(\ell_s g)(t) = g(st)$ for all $t \in S$. We also denote by ℓ_s^* the conjugate operator of ℓ_s. Let X be a subspace of $B(S)$ containing 1 and let X^* be its topological dual. A linear functional μ on X is called a mean on X if $\|\mu\| = \mu(1) = 1$. We often write $\mu_t(g(t))$ or $\int g(t)d\mu(t)$ instead of $\mu(g)$ for $\mu \in X^*$ and $g \in X$. Further, assume that X is invariant under every ℓ_s, $s \in S$, i.e., $\ell_s X \subset X$ for each $s \in S$. Then, a mean μ on X is called invariant if $\mu(\ell_s g) = \mu(g)$ for all $s \in S$ and $g \in X$. For $s \in S$, we can define a point evaluation δ_s by $\delta_s(g) = g(s)$ for every $g \in B(S)$. A convex combination of point evaluations is called a finite mean on S. A finite mean μ on S is also a mean on any subspace X of $B(S)$ containing constants.

The following definition which was introduced by Takahashi [13] is crucial in the nonlinear ergodic theory for abstract semigroups (see also [7]). Let h be a function of S into E such that the weak closure of $\{h(t) : t \in S\}$ is weakly compact. Let X be a subspace of $B(S)$ containing constants and invariant under every ℓ_s, $s \in S$. Assume that for each $x^* \in E^*$, the function $t \mapsto \langle h(t), x^*\rangle$ is an element of X. Then, for any $\mu \in X^*$ there exists a unique element $h_\mu \in E$ such that

$$\langle h_\mu, x^*\rangle = (\mu)_t \langle h(t), x^*\rangle = \int \langle h(t), x^*\rangle \, d\mu(t)$$

for all $x^* \in E^*$. If μ is a mean on X, then h_μ is contained in $\overline{\mathrm{co}}\{h(t) : t \in S\}$ (for example, see [13, 14]). Sometimes, h_μ will be denoted by $\int h(t)d\mu(t)$.

Let C be a closed convex subset of a Banach space E. Then, a family $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ of mappings of C into itself is called a nonexpansive semigroup on C if it satisfies the following conditions:

(a) $T(s+t) = T(s)T(t)$ for all $s, t \in S$;
(b) $s \mapsto T(s)x$ is continuous;
(c) $\|T(s)x - T(s)y\| \leq \|x-y\|$ for all $x, y \in C$ and $s \in S$.

We denote by $F(\mathcal{S})$ the set of common fixed points of $T(t), t \in S$. Let $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ be a nonexpansive semigroup on C. Assume that for each $x \in C$ and $x^* \in E^*$, the weak closure of $\{T(t)x : t \in S\}$ is weakly compact and the mapping $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ is an element of X. Let μ be a mean on X. Following [11], we also write $T_\mu x$ instead of $\int T(t)x \, d\mu(t)$ for $x \in C$. We remark that T_μ is nonexpansive on C and $T_\mu x = x$ for each $x \in F(\mathcal{S})$. If μ is a finite mean, i.e.,

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{t_i} \ (t_i \in S, a_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1),$$

then

$$T_\mu x = \sum_{i=1}^{n} a_i T(t_i)x.$$

3. Locally uniformly rotund sets

In this section, we study the notion of locally uniformly rotund (see [16]). Let E be a Banach space, let C be a nonempty bounded closed and convex subset of E. Assume that C have nonempty interior, that is, $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset$. We say that C is **locally uniformly rotund (LUR)** if for each $x \in \partial C$ and for each $\varepsilon \in (0, d_x)$, where $d_x = \sup\{\|x - y\| : y \in C\}$, there exists $\delta(x, \varepsilon) > 0$ such that for each $y \in C$ with $\|x - y\| \geq \varepsilon$, we have

$$\operatorname{dist}\left(\frac{x+y}{2}, \partial C\right) := \inf\left\{\left\|\frac{x+y}{2} - x'\right\| : x' \in \partial C\right\} \geq \delta(x, \varepsilon).$$

Let C be a nonempty bounded closed and convex subset of a Banach space E, Assume that C have nonempty interior, that is, $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset$. We say that C is uniformly convex if for each $\varepsilon \in (0, \operatorname{diam(C)})$, there exists $\eta_C(\varepsilon) > 0$ such that for each $x, y \in C$ with $\|x - y\| \geq \varepsilon$, we have

$$\operatorname{dist}\left(\frac{x+y}{2}, \partial C\right) := \inf\left\{\left\|\frac{x+y}{2} - x'\right\| : x' \in \partial C\right\} \geq \eta_C(\varepsilon).$$

At this point we present a simple example of a bounded closed and convex subset of a Hilbert space, which is LUR but not uniformly convex (see [9]).

Let $H = \ell^2$. Let

$$C = \left\{ x = \{x^i\} \in H = \ell^2 : \sum_{k=2}^{\infty} (|x^{2k-1}|^k + |x^{2k}|^k)^{\frac{2}{k}} \leq 1 \right\}$$

Then, C is bounded, closed, convex and has nonempty interior. Moreover, C is locally uniformly rotund, but not uniformly convex.

4. Convergence theorems for nonexpansive semigroups

In this section we prove the convergence theorems for nonexpansive semigroups with no common fixed points in the interior of their domains. A sequence $\{x_n\}$ in C is said to be an approximating sequence of a nonexpansive mapping $T : C \to C$ if

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0.$$

Let S be a commutative semitopological semigroup, i.e., S is a commutative semigroup with a Hausdorff topology. A family $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ of mappings of C into itself is said to be a nonexpansive semigroup on C if it satisfies the following conditions:

(i) For each $t \in S$, $T(t)$ is nonexpansive;
(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ for each $t, s \in S$;
(iii) $s \mapsto T(s)x$ is continuous.

A sequence $\{x_n\}$ in C is said to be an approximating sequence of a nonexpansive semigroup $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ if

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(t)x_n\| = 0$$

for each $t \in S$. Let $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ be a nonexpansive semigroup on C. Assume that for each $x \in C$ and $z \in H$, the weak closure of $\{T(t)x : t \in S\}$ is weakly compact and the mapping $t \mapsto \langle T(t)x, z\rangle$ is an element of X. Let μ be a mean on X. Following [11], we also write $T_\mu x$ instead of a $\int T(t)x\, d\mu(t)$ for all $x \in C$. We remark that T_μ is nonexpansive on C and $T_\mu x = x$ for each $x \in F(\mathcal{S})$.

Theorem 4.1 ([1])**.** *Let E be a reflexive Banach space which admits a demiclosedness principle with respect to nonexpansive mappings. Assume that C is bounded, closed and convex with nonempty interior. Assume further that C is locally uniformly rotund. Let $\mathcal{S} = \{T(t){:}t \in S\}$ be a nonexpansive semigroup. If $\mathcal{S} = \{T(t){:}t \in S\}$ has a unique common fixed point z and z lies on the boundary ∂C of C, then every approximating sequence $\{x_n\}$ of $\mathcal{S}$ converges strongly to z.*

The following was proved in [12, 3] (see also [7]). In the proof of the main theorem, the following lemma is crucial.

Lemma 4.2. *Let C be a nonempty closed convex subset of a uniformly convex Banach space E. Let S be a commutative semigroup and let $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ be a nonexpansive semigroup on C such that $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$. Let X be a subspace of $B(S)$ such that $1 \in X$, it is ℓ_s-invariant for each $s \in S$, and the function $t \mapsto \langle T(t)x, x^*\rangle$ is an element of X for each $x \in C$ and $x^* \in E^*$. Let $\{\mu_n\}$ be a sequence of means on X such that $\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \ell_s^*\mu_n\| = 0$. Then, for each $r > 0$, $w \in C$ and $t \in S$,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in D_r} \|T_{\mu_n}y - T(t)T_{\mu_n}y\| = 0,$$

where $D_r = \{z \in C : \|z - w\| \leq r\}$.

Theorem 4.3 ([1])**.** *Let E be a a uniformly convex Banach space and let C be a bounded closed and convex subset of E. Assume that C has nonempty interior and is locally uniformly rotund. Let $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ be a nonexpansive semigroup on C. If $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ has no common fixed point in the interior of C, then there exists a unique point z_0 on the boundary ∂C of C such that the orbit $S(t)x : t \leq 0$ converges strongly to z_0.*

The following example shows that the assumption that C is locally uniformly rotund is crucial (see[6]).

Example 1. *Let $H = \mathbb{R}^2$ be endowed with the standard Euclidean norm and let $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. If $T(x, y) = (1, -y)$ for $(x, y) \in C$, then T is* *nonexpansive and* $(1,0) \in \partial C$ *is its unique fixed point, but* $\{T^n(1,1), n = 1,2,\ldots\}$*, do not converge to* $(1,0)$.

Corollary 4.4 ([1])**.** *Let* E *be a reflexive Banach space which admits a demiclosedness principle with respect to nonexpansive mappings. Let* C *be a bounded, closed and convex subset of* E *with nonempty interior. Assume that* C *is locally uniformly rotund. Let* $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ *be a nonexpansive semigroup on* C*. Assume that* $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ *has a unique common fixed point* z_0 *and* z_0 *lies on the boundary* ∂C *of* C*. Then for each* $x \in C$*, the sequence* z_x*:*$[0,1) \to C$*, defined implicitly by* $z_x(s) = (1-s)x + sT_{\mu_n} z_x(s)$*, where* $s \in [0,1)$*, converges strongly to* x *as* $s \to 1$*. In addition, this convergence is uniform with respect to* $x \in C$*.*

Acknowledgements

The author is supported by Grant-in-Aid for Scientific Research No. 19K03582 from Japan Society for the Promotion of Science.

References

1. S. Atsushiba, *Convergence of orbits of nonexpansive semigroups in Banach spaces*, submitted.
2. S. Atsushiba, *Strong convergence to common attractive points of uniformly asymptotically regular nonexpansive semigroups*, J. Nonlinear Convex Anal. **16** (2015), 69-78.
3. S. Atsushiba, N. Shioji and W. Takahashi, *Approximating common fixed points by the Mann iteration procedure in Banach spaces,* J. Nonlinear Convex Anal. **1** (2000), 351–361.
4. S. Atsushiba, and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems without convexity for nonexpansive semigroups in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **14** (2013), 209-219.
5. J.-B. Baillon, *Un theoreme de type ergodique pour les contractions non lineaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sei. Paris Ser. A-B **280** (1975), 1511 - 1514.
6. A. Grzesika, W. Kaczorb, T.Kuczumowb, S. Reich *Convergence of iterates of nonexpansive mappings and orbits of nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl, **475** (2019), 519–531.
7. N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 1269-1281.
8. P. Kocourek, W. Takahashi, and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and weak convergence theorems for generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math. **14** (2010), 2497–2511. Adv. Math. Econ. **15** (2011), 67–88.
9. A. R. Lovaglia, Locally uniformly convex Banach spaces, Tarn. Amer. Math. Soc. **78** (1955) 225-238.
10. W.R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506–510.
11. G. Rodé, *An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **85** (1982), 172–178.
12. N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **1** (2000), 73–87.
13. W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253-256.
14. W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
15. W. Takahashi and Y. Takeuchi, *Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **12** (2011), 399–406.
16. C. Zanco and , A Zucchi *Moduli of rotundity and smoothness for convex bodies*, Boll. Unione. Ital. **7** (1993), 833-855.

フーリエ・ベッセル変換について
（積分の"総和法"など）

岡田正己（首都大 客員研究員）

§0 はじめに：『有界な実関数 f_0 のフーリエ変換 $\hat{f_0}(\xi)\in\mathcal{S}'$ が可積分、もしくは局所可積分となるのは、f_0 がどういう関数のときだろうか？』というのが当初の素朴(すぎる)疑問であった。勿論、まず $f_0(x)=\cos ax$ ($a\in\mathbb{R}$) のような周期関数は、最初から除外し、$|x|\to\infty$ で $f_0\to 0$ である関数を扱う。$\widehat{\Delta^k f_0}(\xi)=(-|\xi|^2)^k\hat{f_0}(\xi)$ なので、$\hat{f_0}(\xi)$ が $|\xi|\to\infty$ では十分早く 0 にゆくための十分条件は満たされることにして、$f_0\in C^{[\frac{d}{2}]}$ くらいは仮定しておく。あとは $\hat{f_0}$ の局所可積分性のための十分条件を探す。そのため $|\hat{f_0}(\xi)|$ が発散もしくは非常に大きな値をとる ξ は $\xi=0$ の近傍に限られるなら考え易いと考えて、f_0 は非負のなめらかな実関数で $f_0(x)\to 0$ ($|x|\to\infty$) なるものに絞って、できるだけゆっくりと減少するような一連の典型例を探すことにする。

大きなヒントになるのが [Z] p.186-189 で一次元フーリエ級数の場合、$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n\xi}{\log n}\simeq\frac{\pi}{2}\xi^{-1}\log^{-2}\left(\frac{1}{\xi}\right)$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n\xi}{\log n}\simeq\frac{1}{\xi}\log^{-1}\left(\frac{1}{\xi}\right)$ ($\xi\downarrow 0$) という例、およびその一般化の結果が述べられている。これからすぐに導けることとして $d=1$ のとき $f_0(x)=\frac{1}{\log(x^2+2)}$ が $\hat{f_0}\in L^1(\mathbb{R})$ となる、ということがある。多次元フーリエ級数の結果、さらにその多次元フーリエ変換版との関連について筆者には不明なので、本質的に一次元になるものとして、多次元 $\mathbb{R}^d$ の球対称な関数 $f_0(x)$ を扱うことにするが、それでもそれなりに数学的・心理的な壁を超える必要があると思われる。いくつかの準備をしておく。

§1. 準備 (1-1) アーベル的な広義積分(弱い意味の広義積分)

級数のアーベル総和法にならって、関数 $f(x) = x^{a-1} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} x$ の弱い意味の広義積分を考える。[T] p.255 によれば既にオイラーが $\int_0^\infty e^{-\varepsilon x} x^{a-1} \cos x \, dx$ を計算していたようだ! 同書 p.257 には $0<a<1$ のとき、$x^{a-1} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} x$ は $(0,\infty)$ で通常の意味での広義積分が可能で

$$\int_0^\infty x^{a-1} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} x \, dx = \Gamma(a) \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \frac{a\pi}{2}$$ であることが留数計算で示されている。

ところで、この等式の右辺は a について正則で $a \geq 1$ でも意味がある。左辺にも $a \geq 1$ で意味を持たせよう。まず $\varepsilon > 0$ として $E(a,\varepsilon)$

$$= \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} x^{a-1} e^{-ix} dx = \int_0^\infty e^{-(\varepsilon+i)x} x^{a-1} dx$$ とおく。

<u>観察</u> $a>0$ ならば $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E(a,\varepsilon)$ が存在して $\Gamma(a) e^{-\frac{a\pi}{2}i}$ に一致。

証明には、$0<a<1$ では $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E(a,\varepsilon) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-ix} dx$ であることを、例えば積分法の第2平均値定理で確かめる。(区間が $[0,\infty]$ であるが、修正は困難なしで可能。)、他方では、$E(a,\varepsilon) = \frac{a-1}{\varepsilon+i} E(a-1,\varepsilon)$ なることを部分積分で示して Γ 関数の基本的な関係式に対応していることを確認すればよい。$a=1$ の場合も別途チェックできるので、等式が $1 \leq a < 2$ でも成立することが示せる。あとは帰納的に続けられる。

(1-2) ベッセル関数 J_ν に対する弱い意味の広義積分 $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} x^\mu J_\nu(x) \, dx$

これが $\mu+\nu > -1$ なら定義できることは J_ν についての基本事項

$J_\nu(x) \sim c_\nu x^\nu \ (x \to 0)$, $J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{-\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ より、わかる。

詳しい漸近展開は [数3] p.1410 を参照。

後で関係式(パラメータ入った形) $x^{\nu+1} J_\nu(\rho x) = \frac{1}{\rho}\left(x^{\nu+1} J_{\nu+1}(\rho x)\right)'$ と

$x^{-\nu} J_{\nu+1}(\rho x) = -\frac{1}{\rho}\left(x^{-\nu} J_\nu(\rho x)\right)'$ が使われる。

(1-3) 球対称関数のフーリエ変換

$\mathbb{R}^d$ 上 球対称関数 $f_0(x) = f(|x|)$ が与えられている、とする。$f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ならば、そのフーリエ変換 $\hat{f_0}(\xi)$ は連続球対称関数になるので、$|\xi| = \rho$ の関数 $\mathcal{F}f(\rho)$ があって $\hat{f_0}(\xi) = \mathcal{F}f(\rho)$ と書ける。すると $\mathcal{F}f$ は次で与えられる([数3] p.1381, [M] p.126 など)。

$$\mathcal{F}f(\rho) = \frac{1}{\rho^{\frac{d-2}{2}}}\int_0^\infty f(r)\, r^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d-2}{2}}(\rho r)\,dr = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\rho^{\frac{d-2}{2}}}\int_0^\infty e^{-\varepsilon r} f(r)\, r^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d-2}{2}}(\rho r)\,dr .$$

ここで最後の極限は、$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ での極限から導かれるもので、弱い意味の広義積分と思ってよい。例として $f_0(x) = |x|^{-\beta d}$ $(0<\beta<1)$ は $L^1(\mathbb{R}^d)$ には属さず、$\beta \le \frac{1}{2}$ なら $L^2(\mathbb{R}^d)$ の元でもないが、変数変換 $\rho r = t$ により、$\rho > 0$ にたいして、各点収束することが (1-2) より、わかる。

後ほど、$f(r) = \dfrac{1}{\log(r+3)}$ のような"素直に" $r \to \infty$ のとき単調に 0 にゆく関数についても、弱い意味の広義積分が定義できるだけでなく、$\mathcal{F}f(\rho)$ の $\rho \downarrow 0$ における増大(発散)の様子が、かなりわかることを示す。

(1-4) "素直に"ゆっくりと単調に0にゆく関数.

[Z] では slowly varying function という関数の集合が考察されている。それは $r \to \infty$ のときに $\dfrac{1}{\log r}$ や $\dfrac{1}{\log(\log r)}$ のような導関数も含めて、単調に 0 に収束する関数を含んでいる。我々は、もう少し大ざっぱな性質を仮定することにする。$D = -r\dfrac{d}{dr}$ とおいて、$k = 0, 1, \cdots, [\frac{d}{2}]$ (もしくは $[\frac{d+1}{2}]$) について $D^k f(r) \to 0$ $(r \uparrow \infty)$ が単調に云えて、さらに $0 < {}^{\exists}\delta < \frac{1}{2}$ で $D^k f(r)\, r^{\delta}$ は $r \uparrow \infty$ で逆の単調性で発散するものとする。

§2. フーリエ・ベッセル関数

$[0, \infty)$ で定義された関数 $f(r)$ に対して その一般化されたフーリエ・ベッセル関数 $B_{\mu,\nu,\varepsilon}[f](\rho)$ を次で定義する。

__定義__ $B_{\mu,\nu,\varepsilon}[f](\rho) = \rho^{\mu}\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r} f(r) r^{\mu} J_{\nu}(\rho r)dr \quad (\mu+\nu > -1, \quad \rho > 0)$.

__例__ $\mathbb{R}^d$ 上の球対称関数 $f_0(x)$ に対する $\mathcal{F}f(\rho)$ は $\mathcal{F}f(\rho) =$
$\rho^{-\frac{d-2}{2}}\int_0^{\infty} f(r)\, r^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d-2}{2}}(\rho r)dr$ なので、$\mu = \frac{d}{2}$, $\nu = \frac{d-2}{2}$ が対応し、
$\mathcal{F}f(\rho) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \rho^{-d+1} B_{\frac{d}{2},\frac{d-2}{2},\varepsilon}[f](\rho)$ であり、$\hat{f_0}(\xi) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d ; d\xi)$
$\Leftrightarrow \mathcal{F}f(\rho) \in L^1_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+} ; \rho^{d-1}d\rho) \Leftrightarrow \lim_{\varepsilon\downarrow 0} B_{\frac{d}{2},\frac{d-2}{2},\varepsilon}[f](\rho) \in L^1_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+} ; d\rho)$
となる。
特に $d=1$ のときは $\mathcal{F}f(\rho) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \rho^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r} f(r)\, r^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(\rho r)dr =$
$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r} f(r) \cos(\rho r)\, dr$ であるが、f の微分可能性を仮定せずとも、次は云える。

__命題1__ $f \downarrow 0 \ (r\uparrow\infty)$, $0 < {}^{\exists}\delta < 1$ s.t. $f(r)\, r^{\delta} \nearrow (r\to\infty)$ とする。
このとき $f(\frac{1}{\rho})\frac{1}{\rho} \in L^1((0,1) ; d\rho)$ ならば $B_{\frac{d}{2},\frac{d-2}{2},\varepsilon}[f]$ の $L^1((0,1);d\rho)$ ノルムは ε によらず有界である。

(証明) $\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r} f(r) \cos\rho r\, dr = \int_0^{\frac{1}{\rho}} f(r)\, r^{\delta}\, r^{-\delta} e^{-\varepsilon r} \cos\rho r\, dr +$
$\int_{\frac{1}{\rho}}^{\infty} f(r)\, e^{-\varepsilon r} \cos\rho r\, dr$
とわける。それぞれに積分法の第2平均値定理を用いて、
$$\int_0^{\frac{1}{\rho}} f(r) r^{\delta} r^{-\delta} e^{-\varepsilon r}\cos\rho r\, dr = f(\tfrac{1}{\rho})(\tfrac{1}{\rho})^{\delta}\int_{\eta_1}^{\frac{1}{\rho}} r^{-\delta} e^{-\varepsilon r} \cos\rho r\, dr$$
$$\int_{\frac{1}{\rho}}^{\infty} f(r)\, e^{-\varepsilon r}\cos\rho r\, dr = f(\tfrac{1}{\rho})\int_{\frac{1}{\rho}}^{\eta_2} e^{-\varepsilon r}\cos\rho r\, dr$$
となる $0 \le \eta_1 \le \frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\rho} \le \eta_2$ が存在する。($\eta_2 = +\infty$ でも構わない)
これから2つの積分の絶対値が ε によらない定数 C によって $C\, f(\frac{1}{\rho})\frac{1}{\rho}$ でおさえられることは容易にわかる。 □

[注意] 積分 $\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r} f(r) \sin\rho r\, dr$ についても同様の評価が成立する。

__補題__ $\mu+\nu > 0$ とする。このとき $\overline{\mathbb{R}_+}$ で有界な C^1 級関数 f に対して
$$B_{\mu,\nu,\varepsilon}[f](\rho) = \frac{\varepsilon\rho}{\varepsilon^2+\rho^2} B_{\mu-1,\nu,\varepsilon}[f'r + (\mu+\nu)f](\rho) - \frac{\rho^2}{\varepsilon^2+\rho^2} B_{\mu-1,\nu+1,\varepsilon}[f'r + (\mu-\nu-1)f](\rho).$$

（証明）部分積分で、

$$\text{左辺} = \rho^{\mu-1}\left[e^{-\varepsilon r}f(r)r^{\mu}J_{\nu+1}(\rho r)\right]_0^{\infty} - \rho^{\mu-1}\int_0^{\infty}\left(e^{-\varepsilon r}f\,r^{\mu-\nu-1}\right)' r^{\nu+1}J_{\nu+1}(\rho r)\,dr \quad \text{と変形し}$$

$$= \varepsilon\rho^{\mu-1}\int_0^{\infty}e^{-\varepsilon r}f r^{\mu}J_{\nu+1}(\rho r)\,dr - \rho^{\mu-1}\int_0^{\infty}e^{-\varepsilon r}\{f'r+(\mu-\nu-1)f\}\,r^{\mu-1}J_{\nu+1}(\rho r)\,dr$$

$$= \frac{\varepsilon}{\rho}B_{\mu,\nu+1,\varepsilon}[f] - B_{\mu-1,\nu+1,\varepsilon}[f'r+(\mu-\nu-1)](\rho) \quad \cdots\cdots ㊟$$

ここで右辺第1番目の方だけ部分積分すれば

$$B_{\mu,\nu+1,\varepsilon}[f](\rho) = \rho^{\mu-1}\int_0^{\infty}\left(e^{-\varepsilon r}f\,r^{\mu+\nu}\right)' r^{-\nu}J_{\nu}(\rho r)\,dr$$

$$= -\varepsilon\rho^{\mu-1}\int_0^{\infty}e^{-\varepsilon r}f r^{\mu}J_{\nu}(\rho r)\,dr + \rho^{\mu-1}\int_0^{\infty}e^{-\varepsilon r}(f\,r^{\mu+\nu})' r^{-\nu}J_{\nu}(\rho r)\,dr$$

$$= -\frac{\varepsilon}{\rho}B_{\mu,\nu,\varepsilon}[f](\rho) + B_{\mu-1,\nu,\varepsilon}[f'r+(\mu+\nu)f](\rho)$$

これを上の式㊟に代入して

$$B_{\mu,\nu,\varepsilon}[f] = \frac{\varepsilon}{\rho}\left\{-\frac{\varepsilon}{\rho}B_{\mu,\nu,\varepsilon}[f] + B_{\mu-1,\nu,\varepsilon}[f'r+(\mu+\nu)f]\right\} - B_{\mu-1,\nu+1,\varepsilon}[f'r+(\mu-\nu-1)f]$$

これより右辺第1項を左辺にまとめれば、求める式を得る。 □

補題において $\varepsilon\downarrow 0$ とするとき、右辺第1番目の $L^1((0,1);d\rho)$ ノルムが0に収束するならば、弱い意味の広義積分の"面倒さ"を表わす μ を $\mu-1$ に下げられる。これを続けて、$\mu\leq\frac{1}{2}$ にまで到れば、通常の扱いやすい広義積分に帰着することができて好都合である。この操作を保証するのが次の命題2である。

<u>命題2</u>　$\mu+\nu>-1$, $\mu\leq\frac{1}{2}$ とし、$r\to\infty$ で単調に $g(r)\to 0$ とする。

このとき、$\displaystyle\int_0^1 \frac{\varepsilon\rho}{\varepsilon^2+\rho^2}\left|B_{\mu,\nu,\varepsilon}[g](\rho)\right|d\rho \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon\to 0)$.

（証明のスケッチ）$\rho r = t$ と変数変換すれば $B_{\mu,\nu,\varepsilon}[g](\rho) = \frac{1}{\rho}\int_0^{\infty}e^{-\varepsilon\frac{t}{\rho}}g(\frac{t}{\rho})t^{\mu}J_{\nu}(t)\,dt$ となる。さらに $\rho=\varepsilon\sigma$ と変数変換すれば

$$\int_0^1\frac{\varepsilon\rho}{\varepsilon^2+\rho^2}\left|B_{\mu,\nu,\varepsilon}[g](\rho)\right|d\rho = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{\sigma^2+1}\left|\int_0^{\infty}e^{-\frac{t}{\sigma}}g\left(\frac{t}{\varepsilon\sigma}\right)t^{\mu}J_{\nu}(t)\,dt\right|d\sigma.$$

ここで積分 $\int_0^{\infty}\cdots dt$ を $\int_0^N$ と $\int_N^{\infty}$ にわければ $g\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$ より

ルベーグ収束定理から $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{\sigma^2+1}\left|\int_0^N g\left(\frac{t}{\varepsilon\sigma}\right)t^{\mu}J_{\nu}(t)\,dt\right|d\sigma \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon\to 0)$

であり、$\int_N^{\infty}$ には g の単調性から積分法の第2平均値定理を用いれば

$\displaystyle\int_N^{\infty}e^{-\frac{t}{\sigma}}g\left(\frac{t}{\varepsilon\sigma}\right)t^{\mu}J_{\nu}(t)\,dt = g\left(\frac{N}{\varepsilon\sigma}\right)\int_N^{\eta}e^{-\frac{t}{\sigma}}t^{\mu}J_{\nu}(t)\,dt$ となる η が存在する。

$\mu \leqq \frac{1}{2}$ と仮定したので $\int_N^{\eta} e^{-\frac{t}{\sigma}} t^{\mu} J_{\nu}(t)\,dt \sim \int_N^{\eta} e^{-\frac{t}{\sigma}} t^{\mu-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \cos\left(t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cdots \right\} \cdot dt$

Nはνに応じて大きくとっておけば事実上 $\int_N^{\eta} e^{-\frac{t}{\sigma}} t^{\mu-\frac{1}{2}} \cos t\,dt$ の積分の評価ができればよく。$\mu < \frac{1}{2}$なら通常の広義積分となりOK．$\mu = \frac{1}{2}$でも N, η, σによらない定数でおさえられる。任意にσ, N とめたとき $\varepsilon \downarrow 0$で $g(\frac{N}{\varepsilon\sigma}) \to 0$ であるので、やはりルベーグの収束定理で、0に収束することが示される。 □

[注意] $\mathbb{R}^d$のフーリエ変換から出発すると．$\mu = \frac{d}{2}$, $\nu = \frac{d-2}{2}$ より $\mu - \nu - 1 = 0$.

以上を総合して、一般の場合を述べておこう。

§3 主な結果.

<u>定理</u> $D = -r\frac{d}{dr}$ とおく。$d=1$のときは $0 \leqq f \in C^1$, $d \geqq 2$ なら $0 \leqq f \in C^{[\frac{d}{2}]}$ とする。以下、2つの仮定をおく．

(単調性) 単調に $D^k f \longrightarrow 0$ $(r \to \infty)$ $k = 0, 1, 2, \cdots [\frac{d}{2}]$.

さらに $0 < {}^{\exists}\delta < \frac{1}{2}$ で $(D^k f) \cdot r^{\delta}$ は逆の単調性を仮定する。
$k = 0, 1, 2, \cdots [\frac{d}{2}]$

(積分条件) $d=1$のとき $Df(\frac{1}{\rho})\frac{1}{\rho} \in L^1((0,1); d\rho)$

$d \geqq 2$のとき $D^k f(\frac{1}{\rho})\frac{1}{\rho} \in L^1((0,1); d\rho)$ $k = \ 1, 2, \cdots [\frac{d}{2}]$

そのとき、$\mathcal{S}'$の意味の極限として現れる $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} B_{\frac{d}{2}, \frac{d-2}{2}, \varepsilon}[f]$ は、実際は関数であり、$L^1((0,1); d\rho)$ に属す。

なお、$f \in C^{[\frac{d+1}{2}]}$ と仮定すれば、$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} B_{\frac{d}{2}, \frac{d-2}{2}, \varepsilon}[f]$ は $L^1((0,1); d\rho)$ ノルムでの極限でもある。

証明には、$d = 1, 2$ を示しておく必要もあるが、発表時に触れたこともあり、紙数の制限上、省略させて頂く。 (Nov. 2019)

<u>参考文献</u>

[Z] A. Zygmund "Trigonometric Series"

[T] 高木貞治 "解析概論"

[数3] 日本数学会 "数学辞典 第3版"

[M] 溝畑茂 "偏微分方程式論"

Matrix Functions and Matrix Order

Mitsuru Uchiyama (Shimane U.(EP), Ritsumeikan U.(Guest))
Lawrence G. Brown (Purdue U.)

1 Introduction

This note is based on [5]. The main purpose is to give a new method to construct an operator monotone function,

Let $f(t)$ be a real continuous function defined on an interval J in the real axis. For a hermitian matrix A whose spectrum is in J, $f(A)$ is well-defined. f is called an *operator monotone function* on J and denoted by $f \in \mathbf{P}(J)$ if this map $A \mapsto f(A)$ preserves the matrix order, i.e.,

$$f(A) \leqq f(B) \text{ whenever } A \leqq B.$$

We remark that the above inequalities hold for A, B of an arbitrary size. $\mathbf{P}_+(J)$ stands for $\{f | f \in \mathbf{P}(J), f(t) > 0\}$. f is said to be *operator decreasing* if $-f \in \mathbf{P}(J)$. g is called an *operator convex function* on J if

$$g(sA + (1-s)B) \leqq sg(A) + (1-s)g(B)$$

for every $0 < s < 1$ and for every pair A, B with spectra in J.

An *operator concave function* is similarly defined. We here give some examples to help our comprehension. But the proves of some of them need subsequent results.

Example 1. (i) A power function t^λ is operator monotone and operator concave on $(0, \infty)$ for $0 \leq \lambda \leq 1$.
(ii) For $1 < \lambda \leq 2$, t^λ is operator convex but not operator monotone on $(0, \infty)$.
(iii) $1/t$ is operator decreasing and operator convex on $(0, \infty)$.
(iv) $1/t$ is operator decreasing and operator concave on $(-\infty, 0)$.
(v) $\tan t \in \mathbf{P}(-\pi/2, \pi/2)$.

We now refer to the excellent theorem:

Löwner (or Loewner)[8] Let J be open. Then $f \in \mathbf{P}(J)$ if and only if f has a holomorphic extension $f(z)$ to the open upper half plane Π_+ which is a *Pick function*. In this case,

$$f(t) = \alpha + \beta t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x-t}\right) d\nu(x),$$

where α is real, $\beta \geqq 0$ and ν is a Borel measure so that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} d\nu(x) < \infty, \quad \nu(J) = 0.$$

Refer to **Donoghue**[7] and **B. Simon**[9] for further study on this area.

A relationship between the operator monotone function and the operator convex function has been investigated:

Bendat-Sherman [2]. $g(t)$ is operator convex on an open interval J if and only if

$$K_g(t, t_0) := \frac{g(t)-(t_0)}{t-t_0} \quad (t \neq t_0), \quad K_g(t_0, t_0) = g'(t_0)$$

is in $\mathbf{P}(J)$ for every $t_0 \in J$.

M. Uchiyama [12]. Let $g(t)$ be a C^1-function on an open interval J. Then $g(t)$ is operator convex if $K_g(t, t_0)$ is operator monotone for one point $t_0 \in J$.

B. Simon(2017) showed us that $\frac{\tan t}{t}$ is operator convex since

$$\frac{\frac{\tan t}{t} - 1}{t} \in \mathbf{P}(-\pi/2, \pi/2).$$

The following characterization for an operator convex function is fundamental for subsequent study on operator inequality.

C. Davis[6]. g is operator convex on J if and only if

$$Pg(A_P)P \leq Pg(A)P$$

for every A with spectrum in J and for every orthogonal projection P, where A_P is the compression of A to the range of P.

Definition 1.1 (L. Brown [3, 4]). g is called a *strongly operator convex function* and denoted by $g \in \mathbf{SOC}(J)$ if

$$Pg(A_P)P \leq g(A)$$

for every A and for every orthogonal projection P.

One can see the following elementary facts.

⋆ A strongly operator convex function is operator convex.

⋆ A positive constant function is strongly operator convex.

⋆ The identity function $f(t) = t$ is not strongly operator convex on any interval.

2 Strongly operator convex functions

Theorem 1 ([5])**.** Let $g(t)$ be a continuous function on J such that $g(t) > 0$. Then the following are mutually equivalent.
(i) $g \in \mathbf{SOC}(J)$.
(ii)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}g(A) + \frac{1}{2}g(B) - g(\frac{A+B}{2})\\ \geq&\frac{1}{2}\left(g(A) - g(B)\right)\{g(A) + g(B)\}^{-1}\left(g(A) - g(B)\right).\end{aligned}$$

(iii) $1/g(t)$ is operator concave.
(iv) $g(t) > 0$ and

$$\begin{aligned}&S^*g(A)S + \sqrt{I - S^*S}g(B)\sqrt{I - S^*S}\\ &- g(S^*AS + \sqrt{I - S^*S}B\sqrt{I - S^*S})\\ &\geq X\{\sqrt{I - SS^*}g(A)\sqrt{I - SS^*} + Sg(B)S^*\}^{-1}X^*\end{aligned}$$

for every contraction S and for every pair of bounded self-adjoint operators A, B with spectra in J, where

$$X = S^*g(A)\sqrt{I - SS^*} - \sqrt{I - S^*S}g(B)S^*.$$

Theorem 2 ([5])**.** (i) $g \in \mathbf{SOC}(-\infty, \infty)$ if and only if $g(t)$ is a non-negative constant function.

(ii) Let $J = (a, \infty)$ with $-\infty < a$. Then $0 \neq g \in \mathbf{SOC}(a, \infty)$ if and only if $g(t) > 0$ and $g(t)$ is operator decreasing (cf. [12]). In this case, $g(t)$ is represented as

$$g(t) = g(\infty) + \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{t-x} d\nu_-(x),$$

where $\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{|x|+1} d\nu_-(x) < \infty$ (cf. [11, 1]).

(iii) Let $J = (-\infty, b)$ with $b < \infty$. Then $g \in \mathbf{SOC}(J)$ if and only if $g(t) > 0$ and $g(t)$ is operator monotone on J.

(iv) $g \in \mathbf{SOC}(0, \infty)$ is a completely monotone function, i.e., $(-1)^n g^{(n)}(t) \geqq 0$ $(0 < t < \infty)$ for $n = 0, 1, 2, \cdots$.

Theorem 3 ([5]). Let $f(t)$ be a continuous function on J and $t_0 \in J$. Then

$$f(t) \in \mathbf{P}(J) \iff K_f(t, t_0) \in \mathbf{SOC}(J).$$

Example 2. Since $\tan t$ is operator monotone on $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\frac{\tan t}{t}$ is strongly operator convex.

Corollary 1. Let J be an open interval. If $g_n \in \mathbf{SOC}(J)$ and $g_n(t)$ converges pointwise to $g(t)$ as $n \to \infty$, then $g \in \mathbf{SOC}(J)$.

Corollary 2. Let $g(t) \in \mathbf{SOC}(a, b)$. Then there is a decomposition of $g(t)$ such that

$$g(t) = g_+(t) + g_-(t) \quad \text{for } t \in (a, b),$$

where $g_+ \in \mathbf{SOC}(a, \infty)$ and $g_- \in \mathbf{SOC}(-\infty, b)$.

$\star$ Theorem 3 gives a new method to construct an operator monotone function. For $f_0 \in \mathbf{P}(J)$, choose t_0 in J and put $f_1(t) := (f_0(t) - f_0(t_0))/(t - t_0) \in \mathbf{SOC}(J)$. Since f_1 is a non-zero strongly operator convex function, $1/f_1$ is operator concave, hence $f_2 := -1/f_1$ is operator convex. Choose $t_1 \in J$ and put $f_3(t) := (f_2(t) - f_2(t_1))/(t - t_1)$. Then f_3 is a new operator monotone function.

Example 3. Since $\tan t \in \mathbf{P}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\frac{\tan t}{t} \in \mathbf{SOC}(J)$ and hence

$$\frac{\tan t - t}{t^2} = \frac{\frac{\tan t}{t} - 1}{t - 0} \in \mathbf{P}(J).$$

Example 4. Since $\frac{\tan t}{t} \in \mathbf{SOC}(J)$ for $J = (-\pi/2, \pi/2)$, $\frac{t}{\tan t}$ is operator concave, i.e., $-\frac{t}{\tan t}$ is operator convex. Thus

$$\frac{1}{t} - \cot t = \frac{-\frac{t}{\tan t} + 1}{t - 0} \in \mathbf{P}(J).$$

Example 5. *Since* $t^\alpha \in \mathbf{P}(J)$*, where* $0 < \alpha < 1$ *and* $J = (0, \infty)$, $\frac{t^\alpha - 1}{t - 1} \in \mathbf{SOC}(J)$*, and hence*

$$\frac{t^{\alpha-1} - 1}{t^\alpha - 1} = \frac{-\frac{t-1}{t^\alpha - 1} + 1}{t} \in \mathbf{P}(0, \infty)$$

.

We end this note with the following extension theorem of function defined on a finite interval.

Proposition 1 ([5], cf. Ju. L. Šmul'jan[10]). Let $f(t)$ be a function on a finite interval (a, b). Then

(i) If f is operator concave and operator monotone on (a, b), then f has an extension $\tilde{f}$ to (a, ∞) such that $\tilde{f}$ is operator concave and operator monotone on (a, ∞).

(ii) If f is operator convex and operator decreasing on (a, b), then f has an extension $\tilde{f}$ to (a, ∞) such that $\tilde{f}$ is operator convex and operator decreasing on (a, ∞).

(iii) If f is operator convex and operator monotone on (a, b), then f has an extension $\tilde{f}$ to $(-\infty, b)$ such that $\tilde{f}$ is operator convex and operator monotone on $(-\infty, b)$.

(iv) If f is operator concave and operator decreasing on (a, b), then f has an extension $\tilde{f}$ to $(-\infty, b)$ such that $\tilde{f}$ is operator concave and operator decreasing on $(-\infty, b)$.

Remark 2.1. We did not know whether this result had been known or not. However **B. Simon** referred us to [10] about (i).

References

[1] T. Ando and F. Hiai, Operator log-convex functions and operator means. Math. Ann. 350(2011)611–630.

[2] J. Bendat and S. Sherman, Monotone and convex operator functions, Trans. Amer. Math. Soc. 79(1965)58–71.

[3] L. G. Brown, Semicontinuity and multipliers of C-algebras. Canad. J. Math. 40 (1988), no. 4, 865-988

[4] L. G. Brown, A treatment of strongly operator convex functions that does not require any Ann. Funct. Anal. 9(1) (2018) 41-55.

[5] L. G. Brown and M. Uchiyama, Some results on strongly operator convex functions and operator monotone functions. Linear Algebra Appl. 553, 238–251(2018).

[6] C. Davis, A Schwarz inequality for convex operator functions, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 42–44.

[7] W. F. Donoghue, *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation.* Springer-Verlag, 1974.

[8] K. Löwner, Über monotone matrixfunktionen. Math. Z., **38** (1934), 177–216.

[9] B. Simon, Loewner's Theorem on Monotone Matrix Functions, Springer. to be published.

[10] Ju. L. Šmul'jan, Monotone operator functions on a set consisting of an interval and a point, Ukrain. Mat. Ž. 17(1965), Amer. Math. Soc. Transl. (2)67(1968), 25–32.

[11] M. Uchiyama, M. Hasumi, On some operator monotone functions, Integr. equ. oper. theory 42 (2002) 243–251.

[12] M. Uchiyama, Operator monotone functions, positive definite kernel and majorization. Proc. Amer. Math. Soc. 138, no. 11, 3985-3996 (2010).

Walsh Fourier Analysis と 測度

米田　薫　（大阪府立大学・名誉教授）

1　はじめに

集合 Ω 上の測度 μ とは、ひとことで言えば、Ω の適当な部分集合 S に実数 $\mu(S)$ 対応させ、μ が加法性を持つように出来ることであろう。その基礎となる部分集合族には、有限加法族と $\sigma-$ 加法族がある。（参照 [1][4]）

典型的なモデルとして、$\Omega = [0,1)$ がある。$[0,1)$ の有限加法族 $\mathcal{A}$ は、$[0,1)$ の部分区間 $[\alpha,\beta)$ から和集合、積集合、補集合を有限回使って構成される（これを「生成する」という）集合族、$\sigma-$ 集合族 $\mathcal{B}$ は同様に 3 つの操作を可算回使ってできる集合族になる。このときの典型的な測度は区間 $[\alpha,\beta)$ に測度を実数 $(\beta-\alpha)$ と決めるところから始める。この例を詳しく見れば、出だしを一般の区間でなく、特別な形の $[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n})$ $(n=0,1,2,\cdots,p=0,1,\cdots,2^n-1)$ の測度を $\frac{1}{2^n}$ と決めるところであってもいい。この例は測度を決める前提が $\mathcal{A}$ を決める以前にあるのではないかということを示唆している。

この集合族の構造を以下の図で示す。

$$[0,1) \begin{cases} \nearrow [0,\frac{1}{2}) < \cdots \\ \searrow [\frac{1}{2},1) < \end{cases} \cdots [\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n}) < \begin{matrix} [\frac{2p}{2^{n+1}},\frac{2p+1}{2^{n+1}}) < \\ [\frac{2p+1}{2^{n+1}},\frac{2p+2}{2^{n+1}}) < \end{matrix} \cdots$$

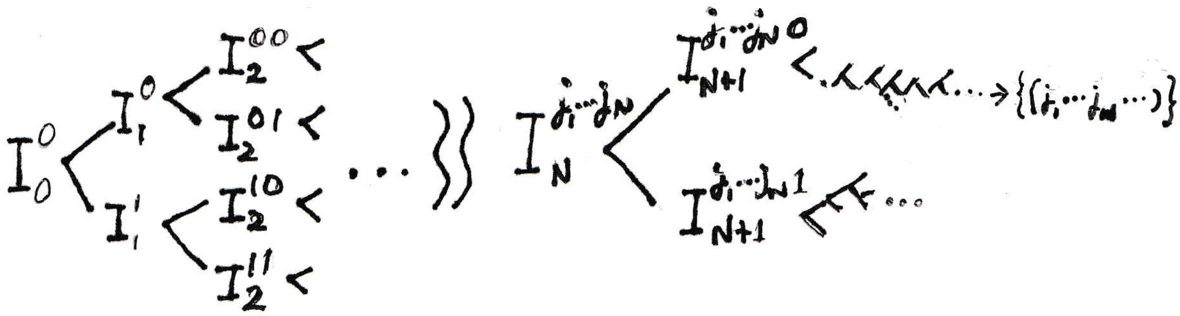
上での論点から、集合を２分割する過程が重要な意味を持っていると想像できる。特に、Ω をすべての 0-1 無限数列の集合とする。すなわち

$$\Omega = I_0^0 \equiv \{(s_1 s_2 \cdots) : s_k = 0 \text{ または } 1\}, I_1^0 \equiv \{(0 s_2 s_3 \cdots)\} \quad I_1^1 \equiv \{(1 s_2 s_3 \cdots)\}$$

一般に

$$I_N^{j_1 j_2 \cdots j_N} \equiv \{(j_1 j_2 \cdots j_N s_{N+1} s_{N+2} \cdots) : s_k = 0 \text{ または } 1, \quad k = N+1, \cdots\}$$

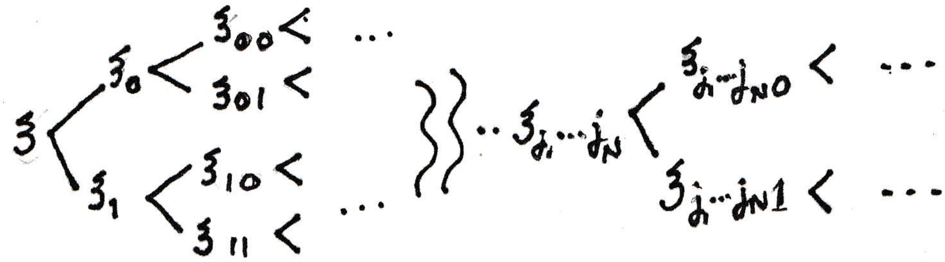
とする。I_0^0 は２分割のすべての”道”の集合であり、I_1^0 は最初の分岐点で上（これを０で表せば）に方向を取る道全体を示している。以下同様である。またこの場合 $\cap_{N=1}^{\infty} I_N^{j_1 j_2 \cdots j_N} = \{(j_1 j_2 \cdots)\}$ と一点（集合）になる。



”道”の集合 I_0^0 と Ω の２分割の過程は同じ構造になっていることがすぐに見て取れる。$I_N^{j_1 j_2 \cdots j_N}$ に $\Omega_{j_1 j_2 \cdots j_N}$ が対応している。ゆえに Ω のコアな部分の振る舞いが I_0^0 の２分割の過程に移ると考えられる。

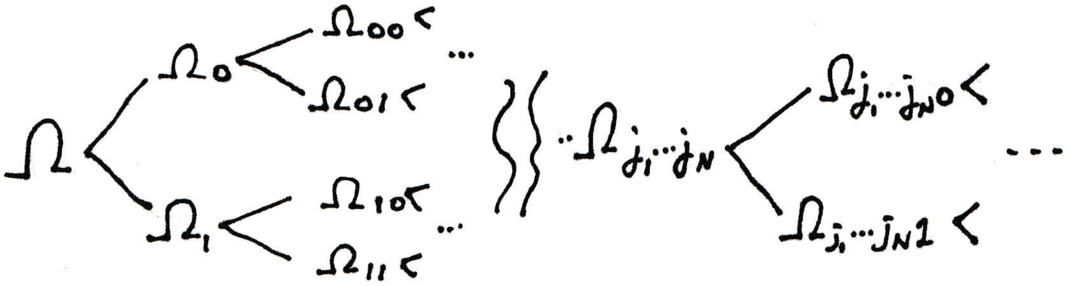
集合の構造について見てきたが、続いて測度の構造について見る。ξ を実数として、実数 ξ を、集合を分割したときのように配分してゆく。ただし、記号 $\cup$ は $+$ に置き換わる。

$$\xi = \xi_0 + \xi_1, \quad \xi_0 = \xi_{00} + \xi_{01}, \quad \xi_1 = \xi_{10} + \xi_{11},$$
$$\cdots, \xi_{j_1 j_2 \cdots j_N} = \xi_{j_1 j_2 \cdots j_N 0} + \xi_{j_1 j_2 \cdots j_N 1}, \cdots$$



2　集合の分割、数の配分

Ω を集合とする。前の章での $[0,1)$ の 2 分割する過程と同じ過程が Ω でも可能ならば、その過程は以下の図のように描ける。



ただし、作り方から　$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \quad (\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset)$、さらに

$$\Omega_{j_1 j_2 \cdots j_N} \cap \Omega_{k_1 k_2 \cdots j_N} = \emptyset \quad ((j_1 j_2 \cdots j_N) \neq (k_1 k_2 \cdots k_N))$$

$$\Omega_{j_1 j_2 \cdots j_N} = \Omega_{j_1 j_2 \cdots j_N 0} \cup \Omega_{j_1 j_2 \cdots j_N 1} \quad (j_k = 0 \text{ または } 1)$$

任意の無限 0-1 数列 $(j_1 j_2 \cdots j_N \cdots)$ に対して

$$\Omega^*_{j_1 j_2 \cdots j_N \cdots} \equiv \cap_{N=1}^{\infty} \Omega_{j_1 j_2 \cdots j_N}$$

とおく。容易に次の関係がでる。

$$\cup_{\{all\ j_1 j_2 \cdots\}}\, \Omega^*_{j_1 j_2 \cdots} = \Omega$$

この場合 $\Omega^*_{j_1 j_2 \cdots} = \emptyset$ になる可能性は残る。Ω が有限集合であれば、必ずどこかの $\Omega_{j_1 j_2 \cdots}$ で空集合になるから、すべてで $\Omega_{j_1 j_2 \cdots} \neq \emptyset$ であるためには、Ω は無限集合でなければならない。さらに $\Omega^*_{j_1 j_2 \cdots}$ が空集合か、一点集合であるためには Ω は高々連続体の無限集合でなければばらない。以上を踏まえると以下の問題が起こる。

問　題　集合 Ω が無限集合で高々連続体であるとすれば、有限加法族 $\mathcal{A}$、または $\sigma-$ 加法族 $\mathcal{B}$ は上で述べたような集合族 $\Omega_{j_1 j_2 \cdots j_N}$ からなる集合族を含んでいるか？

さらにこの問題の解答が肯定的であれば（$[0,1)$ の例は肯定的)、さらにこの集合族が $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を 生成するか が問題になる。

I_0^0 の部分集合 $I_N^{j_1 j_2 \cdots j_N}$ に $\xi_{j_1, j_2 \cdots j_N}$ を対応させる（$I_N^{j_1 j_2 \cdots j_N}$ を商品とすれば、それに値札 $\xi_{j_1 j_2 \cdots j_N}$ を貼るようなイメージになる)。このことを $\rho(I_N^{j_1 j_2 \cdots j_N}) = \xi_{j_1 j_2 \cdots j_N}$ と書くことにしよう。このようにして集合族 $\{I_N^{j_1 j_2 \cdots j_N}\}$ に加法性を持つ一種の測度、擬測度 (quasi-measure）ρ を導入する。このような擬測度 ρ は Walsh series と Walsh series は一対一に対応している。このことによって擬測度の解析は Walsh Fourier Analysis に移すことができる ([5] [6] 参照)。

3 Walsh Series と擬測度

Walsh Series について簡単に解説する。詳しくは参考文献 [2][5][6][7] をごらんいただきたい。

すべての”道”の集合、I_0^0 上に直交系を導入する。

$$w_0(x) = 1、w_1(x) = 1 \quad (x \in I_1^0), \quad = -1 \quad (x \in I_1^1)$$

一般に

$$w_{2^k}(x) = 1 \quad (x \in I_{k+1}^{j_1 j_2 \cdots j_k 0}), \quad = -1 \quad (x \in I_{k+1}^{j_1 j_2 \cdots j_k 1} \cdots)$$

とし、$k_1 < k_2 < \cdots < k_s$ の時、$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s}$ ならば、

$$w_n(x) = w_{2^{k_1}}(x) \cdot w_{2^{k_2}}(x) \cdots w_{2^{k_s}}(x)$$

と定義する。この定義によって $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は完備な正規直交系になる。形式的ではあるが、

$$c_n \equiv \int_{I_0^0} w_n(x) d\rho$$

として　Walsh Series $d\rho \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x)$ を定義する。擬測度 ρ と Walsh Series の関係は $x \in I_N^{j_1 j_2 \cdots j_N}$ の時、

$$\rho(I_N^{j_1 j_2 \cdots j_N}) = \frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^{2^N - 1} c_n w_n(x)$$

である。

4 Ω との関係

一部 2 章のと繰り返しになるが、より具体的なモデルで考えを述べておきたい。

I_0^0 上の擬測度 ρ が与えられたとき、Ω 上の集合 $\Omega_{j_1j_2\cdots j_N}$ が $I_N^{j_1j_2\cdots j_N}$ と連動していることを考慮すると、$\Omega_{j_1j_2\cdots j_N}$ に同じ記号を使って $\rho(\Omega_{j_1j_2\cdots j_N}) \equiv \rho(I_N^{j_1j_2\cdots j_N})$ としてもいいだろう。I_0^0 で起こったことはすべて集合族 $\{\Omega_{j_1j_2\cdots j_N}\}$ に反映している。

集合 Ω の各々の元をある基準で 2 つに分類する。その基準に"yes"だったら 0、"no"だったら 1 としてそれぞれに当たる集合を Ω_0, Ω_1 とする。さらにこれら 2 つの集合についてそれぞれに、前と異なるそれぞれの基準で分類を行う。2 つの集合はさらにそれぞれが 2 つに分類される。この過程を続けると、Ω_0 は Ω_{00} と Ω_{01} に、Ω_1 は Ω_{10}, Ω_{11} に細分される。この構造は「機械学習 (Machine Learning)」で「分類木 (Classification Tree)」と呼ばれるものに相当する。無限回の分類の結果、同じ範疇に属する元の集合は $\Omega^*_{j1j_2\cdots}$ になる。連動する"道"はただ 1 つ $(j_1j_2\cdots\quad j_N\cdots)$ である。もし、$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ または $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ で $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が $\{\Omega_{j_1j_2\cdots}\}$ を含んでおれば、Walsh Series の問題とできる。Ω の中でどの部分に測度 μ で測ると最も多くの元が集中しているかを、Walsh Fourier Series の理論を応用して求めることが可能になる。この場合 2 つの測度空間では、測度 μ が擬測度の役目を担うことになる。

最初に集合 Ω が与えられており、分類木によって部分集合の分類の列 $\{\Omega_{j_1j_2\cdots j_N}\}$ が形成されたとする。各 $\Omega_{j_1j_2\cdots j_N}$ に単なる測度でない擬測度が与えられている時は直接ここに Walsh Series を使うことができる。

擬測度といわゆる測度の違いは、測度は擬測度の特別な場合であり、擬測度は 2 章の定義からわかるように単に集合の 2 分割にたいしての加法性を仮定しているに過ぎない。よって、擬測度の値 $\rho(\Omega_{j_1j_2\cdots j_N}) \equiv \xi_{j_1j_2\cdots j_N}$ が無限大に発散、振動など、測度では考えられない動きをする場合も含まれる。ただし、擬測度 ρ を $\Omega_{j_1j_2\cdots j_N}$ 以外の集合にまで拡張することは一般にはできない。

5　最後に、Walsh Fourier Analysis について

現在ではほとんど見られなくなったが、一時 Walsh Fourier series や Walsh Fourier Trannsform の研究はこの日本でもおこなわれていた。応用面では電気工学分野で実際の応用がある（[1] 参照。）しかし、現在でも旧東欧、アメリカなどで研究は続けられている。その研究は数学的には古典的フーリエ解析のアナロジー問題の追及が多い。しかし、数学とその応用に Walsh Fourier Analysis が独自の役割を発揮しているとはいい難い。Trigonometric Fourier Analysis(古典的フーリエ解析）の手法をなぞることによって、多くのアナロジー問題は Walsh Fourier Analysis でも肯定的に解決した。しかし、すべての問題がそのようにしして解けるとは限らないし、古典的フーリエ解析に無い問題が登場

する可能性が当然ある。その場合には従来のアナロジー的手法は通用しないであろう。数学の世界、さらに広い世界での Walsh Fourier Analysis の可能性、役割、位置づけが何であるかを探らなければならないだろう。このことはこの Walsh Fourier Analysis の分野にかぎらないことではあるが・・・。

古典的 Fourier Series の収束問題では、総和法、特に Cezáro 総和法が活躍する。Walsh Fourier Series でも同様の問題をこの Cezáro 総和法で解こうとする研究が多くある。しかし、Cezáro 総和法と Walsh Fourier Analysis とはけっして相性がいいとは言えない。その原因は Walsh Fourier Analysis の舞台（定義域）を実数空間にしているところにあると筆者は考えている。実数空間上で Walsh Fourier Analysis を展開するのでなく、先に示した I_0^0 上、すなわち無限 $0-1$ 数列を元とする空間で展開すべきであると考える。その時、Walsh Fourier Series と相性のいい総和法を見つけなければならない。

[8] には今は亡き渡利千波教授は、Walsh Fourier Analysis の研究に、視点を変えて新しい展望を期待しておられるコメントを残されている。

参考文献

[1] 遠藤　靖　「ウォルシュ解析」　（東京電機大学出版）　（１９９３）

[2] Fine, N.J. On Walsh functions. T.A.M.S. 65 (1949)

[3] 盛田　健彦　「実解析と測度論の基礎」　（培風館）　（２００４）

[4] 佐藤　坦　「はじめての確率論、測度から確立へ」　（共立出版）　（１９９４）

[5] Schipp, F., Wade,W.R., Simon, P. Walsh Series (Adam Hilger) (1990)

[6] Wade, W.R. and Yoneda K. Uniqueness and quasi measures on the group of integers of p-series field, Proc. Amer. Math.Soc., 84(1982) 202-206.

[7] Walsh, J.L., A closed system of normal orthogonal functions., Amer. Jour. Math. 45 (1923) 5-24.

[8] 渡利　千波　「Walsh 関数再訪」　数理解析研究所　講義録　７０６　Martingale に関する諸問題　８１－９３.

Attainability of the best Sobolev constant in a ball

Norisuke Ioku*

Mathematical institute, Tohoku University
6-3 Aramaki aza Aoba, Sendai, Japan

This report is based on the paper [11]. Complete proofs can be found in [11].

1 Introduction and Results

The Sobolev inequality states that, if $n \geq 2$ and $1 \leq p < n$, then

$$S_{n,p}\|u\|_{L^{p^*}} \leq \|\nabla u\|_{L^p} \tag{1.1}$$

for every $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, where p^* is the Sobolev conjugate number defined by $p^* = np/(n-p)$ and $S_{n,p}$ is the best constant in the inequality (1.1) given by

$$\begin{cases} S_{n,p} = \sqrt{\pi} n^{\frac{1}{p}} \left(\dfrac{n-p}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(n+1-\frac{n}{p}\right)}{\Gamma(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{n}} & \text{for } 1 < p < n, \\ S_{n,1} = \sqrt{\pi}\dfrac{n}{\left[\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}} & \text{for } p = 1, \end{cases}$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the gamma function. The inequality (1.1) with the best constant was obtained by Federer-Fleming [9] and Maz′ya [15] for $p = 1$ and by Aubin [3] and Talenti [19] for $1 < p < n$. Furthermore, if $1 < p < n$, the best constant is attained by the two parameter family

$$U(x) = (a + b|x|^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}}, \quad a, b > 0 \tag{1.2}$$

and its translation. If we replace $\mathbb{R}^n$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, the Sobolev inequality still holds for $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ with the same best constant; however, it is not attained in $W_0^{1,p}(\Omega)$ because the dilation invariance under

$$u_\mu(x) = \mu^{\frac{n-p}{p}} u(\mu x), \qquad \mu > 0, \tag{1.3}$$

breaks (see [14, p.44]). Similar results on optimal Sobolev inequalities in Lorentz spaces with $1 < p < n$ are discussed by Cassani-Ruf-Tarsi [5].

*e-mail address: ioku@tohoku.ac.jp

On the other hand, in the critical case of $p = n$, the Sobolev inequality of the form (1.1) is no longer true because $S_{n,p} \to 0$ as $p \to n$, and $W_0^{1,n}(\Omega)$ is not embedded into $L^\infty(\Omega)$. Alvino [2] considered the critical case and obtained

$$\text{(1.4)} \quad \sqrt{\pi}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}} \sup_{x\in B_R} \frac{|u^*(x)|}{\left(\log\left(\frac{R}{|x|}\right)\right)^{\frac{n-1}{n}}} \leq \|\nabla u\|_{L^n(B_R)} \qquad \text{for all } u \in W_0^{1,n}(B_R),$$

where B_R is the ball centered at the origin with radius $R > 0$ and u^* denotes the Schwarz symmetrization of $u \in W_0^{1,n}(B_R)$. For the definition of u^*, see the end of Section 1 of this paper or [14, Section 1.3]. Alvino's inequality (1.4) is known to be the critical case of Sobolev embeddings because this inequality implies the optimal embedding of $W_0^{1,n}(B_R)$ into Orlicz spaces (see [7, Example 1]). Several equivalent forms of (1.4), especially the relationship between (1.4) and Moser–Trudinger inequalities, are discussed by Cassani–Sani–Tarsi [6].

One of the main difference between the Alvino inequality (1.4) and the Sobolev inequality (1.1) is the scale invariance structure, that is, the critical case (1.4) is not invariant under the dilation $x \mapsto \lambda x$ but is invariant under

$$\text{(1.5)} \qquad u_\lambda(x) = \lambda^{-\frac{n-1}{n}} u\left(\left(\frac{|x|}{R}\right)^{\lambda-1} x\right), \qquad \lambda > 0.$$

This scaling was firstly found by Adimurthi–do Ó–Tintarev [1], and they pointed out that Moser functions are invariant under (1.5). Cassani–Ruf–Tarsi [4] proved that Moser functions are the minimizers of the minimizing problem associated with (1.4) by focusing its invariance under (1.5). Costa–Tintarev [8] applied the scaling (1.5) to analyze the concentration profiles of the Trudinger–Moser functional.

It is well known that the inequalities (1.1) and (1.4) with the best constant have vast applications and generalizations in geometry, physics, and functional analysis. Even though (1.1) and (1.4) are widely studied, several questions still arise naturally from the view-point of attainability of the best constant and the scale invariance property. Does the Sobolev inequality in $W_0^{1,p}(B_R)$ have a scale invariant form? Can we obtain Alvino's inequality (1.4) from Sobolev type inequalities by directly passing to the limit $p \to n$? Is there any relationship between the two scalings: the dilation (1.3) for $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ and the scaling (1.5) for $W_0^{1,n}(B_R)$?

In this paper, we give a positive answer for these questions by discovering the scale invariant form of a Sobolev type inequality in $W_0^{1,p}(B_R)$, which recovers the attainability of the best constant and implies Alvino's inequality by taking $p \to n$.

To state our result, we introduce the q-logarithmic function and q-exponential function as follows:

$$\text{(1.6)} \qquad \begin{aligned} \log_q r &:= \frac{r^{1-q}-1}{1-q}, \\ \exp_q(r) &:= [1+(1-q)r]^{\frac{1}{1-q}}, \end{aligned}$$

for $q > 0,\ q \neq 1$ and $r > 0$. It is easy to verify that

$$\lim_{q\to 1} \log_q r = \log r, \qquad \lim_{q\to 1} \exp_q r = e^r \qquad \text{for all } r > 0.$$

These modified logarithmic, exponential functions were originally introduced by Tsallis [20] to study nonextensive statistics. See [21, Section 3] or [17, Section 2 and Appendix A] for more details on q-logarithmic, exponential functions.

The first result is an improved Sobolev inequality for radially symmetric functions.

Theorem 1.1 (Sobolev type inequality)**.** *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $1 < p < n$, and $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Then for any radially symmetric function $u \in W_0^{1,p}(B_R)$ the following holds:*

$$(1.7) \qquad S_{n,p}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{\frac{1}{n}-1}\left(\int_{B_R} \frac{|u(x)|^{p^*}}{\left[\log_{\frac{n-1}{p-1}} \frac{R}{|x|}\right]^{\frac{p(n-1)}{n-p}}} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \|\nabla u\|_{L^p(B_R)}.$$

The left-hand-side constant is optimal and attained by

$$(1.8) \qquad U_R(x) = \left[a + b\left\{\frac{1}{|x|^{\frac{n-p}{p-1}}} - \frac{1}{R^{\frac{n-p}{p-1}}}\right\}^{-\frac{p}{n-p}}\right]^{1-\frac{n}{p}},$$

where $a, b > 0$. Furthermore, the inequality (1.7) *is invariant under the following nonlinear scaling*

$$(1.9) \qquad \begin{cases} u_\lambda(x) := \lambda^{-\frac{p-1}{p}} u(x_\lambda), \\ x_\lambda := \left[\lambda |x|^{-\frac{n-p}{p-1}} + (1-\lambda) R^{-\frac{n-p}{p-1}}\right]^{-\frac{p-1}{n-p}} \dfrac{x}{|x|}. \end{cases}$$

Remark 1.1. *The inequality* (1.7) *yields the classical Sobolev inequality in a bounded domain Ω and non-attainability of the best constant by symmetrization techniques as follows. Let $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ and u^* be its Schwarz symmetrization, where B_R is the ball centered at the origin having the same measure as Ω. Since*

$$(1.10) \qquad \frac{n-p}{p-1} \log_{\frac{n-1}{p-1}} \frac{R}{|x|} = 1 - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{\frac{n-p}{p-1}} < 1$$

for all $x \in B_R$, the inequality (1.7) *applied to $u^* \in W_0^{1,p}(B_R)$ together with the Pólya-Szegö inequality shows that*

$$(1.11) \qquad \begin{aligned} S_{n,p}\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} = S_{n,p}\|u^*\|_{L^{p^*}(B_R)} &< S_{n,p}\left(\int_{B_R} \frac{|u^*(x)|^{p^*}}{\left[\frac{n-p}{p-1}\log_{\frac{n-1}{p-1}} \frac{R}{|x|}\right]^{\frac{p(n-1)}{n-p}}} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|\nabla u^*\|_{L^p(B_R)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

for all $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Moreover, the strict inequality (1.11) *directly shows that there is no extremal function for the classical Sobolev inequality in Ω.*

Remark 1.2. *Clearly the equality in* (1.10) *shows that Theorem 1.1 yields the classical Sobolev inequality in* $\mathbb{R}^n$ *by taking* $R \to \infty$. *The scaling* (1.5) *converges to the dilation* (1.3) *as* $R \to \infty$, *that is,*

$$\lambda^{-\frac{p-1}{p}} u(x_\lambda) \to (\lambda^{-\frac{p-1}{n-p}})^{\frac{n-p}{p}} u\left(\lambda^{-\frac{p-1}{n-p}} x\right), \quad R \to \infty.$$

Furthermore, the extremal function $U_R(x)$ *in* (1.8) *converges pointwise to the Aubin–Talenti function* $U(x)$ *in* (1.2) *as* $R \to \infty$.

Remark 1.3. *While the classical Sobolev inequality* (1.1) *does not imply Alvino's inequality, Theorem 1.1 yields Alvino's inequality by the direct limiting procedure* $p \to n$. *Indeed, the explicit value of* $S_{n,p}$ *gives us that*

$$S_{n,p}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{-\frac{n-1}{n}} \to \frac{\sqrt{\pi} n^{\frac{1}{n}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

as $p \to n$. *This together with* $\lim_{p \uparrow n} \log_{\frac{n-1}{p-1}} \frac{R}{|x|} = \log \frac{R}{|x|}$ *yields the desired convergence*

$$S_{n,p}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{-\frac{n-1}{n}} \left(\int_{B_R} \frac{|u^*(x)|^{p^*}}{\left[\log_{\frac{n-1}{p-1}} \frac{R}{|x|}\right]^{\frac{p(n-1)}{n-p}}} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \to \frac{\sqrt{\pi} n^{\frac{1}{n}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}} \sup_{x \in B_R} \frac{|u^*(x)|}{\left(\log \frac{R}{|x|}\right)^{\frac{n-1}{n}}}$$

as $p \to n$. *Furthermore, the scaling* (1.9) *coincides with the scaling* (1.5) *if* $p \to n$, *since* $\lim_{p \to n} x_\lambda = \left(\frac{|x|}{R}\right)^{\lambda - 1} x$.

Theorem 1.1 does not hold for arbitrary (not necessarily radially symmetric) $W_0^{1,p}(B_R)$ functions. To prove this, let us assume that (1.7) holds for arbitrary $W_0^{1,p}(B_R)$ functions and then derive a contradiction. Let $d(x)$ be the distance function to the boundary defined by $d(x) := R - |x|$. Since there exists $C > 0$ such that $d(x)/C \le \log_{\frac{n-1}{p-1}} \frac{R}{|x|} \le C d(x)$ for all $x \in B_R$, the inequality (1.7) yields the following Hardy–Sobolev inequality with weight function:

$$\left(\int_{B_R} |u(x)|^{p^*} d(x)^{-\frac{p(n-1)}{n-p}} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \le C \|\nabla u\|_{L^p(B_R)}. \tag{1.12}$$

The necessary condition for the exponent of the weight function is known in the study of Hardy–Sobolev inequalities with weights (see [**?**, Theorem 19.10 and Remark 19.13 with $\kappa = 1, q = 0$]). Since $-\frac{p(n-1)}{n-p}$ is not admissible, the inequality (1.12) cannot hold. Nevertheless, we obtain the following Sobolev type inequality for arbitrary $W_0^{1,p}(B_R)$ functions by introducing the differential operator L_p. The radial derivative $\nabla_r u(x)$ and the tangential derivative $\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x)$ are defined by

$$\nabla_r u(x) := \left(\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x)\right) \frac{x}{|x|}, \qquad \nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x) := \nabla u(x) - \nabla_r u(x). \tag{1.13}$$

We define L_p as follows:

$$L_p u := \nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x) / \left[\frac{n-p}{p-1} \log_{\frac{n-1}{p-1}} \frac{R}{|x|} \right] + \nabla_r u(x).$$

Clearly the following theorem includes Theorem 1.1, since $L_p u = \nabla_r u = \nabla u$ if u is radially symmetric.

Theorem 1.2. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $1 < p < n$. It follows that*

$$S_{n,p} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^{-\frac{n-1}{n}} \left(\int_{B_R} \frac{|u(x)|^{p^*}}{\left[\log_{\frac{n-1}{p-1}} \frac{R}{|x|} \right]^{\frac{p(n-1)}{n-p}}} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \left(\int_{B_R} |L_p u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.14}$$

for all $u \in C_0^\infty(B_R)$. The constant in the left hand side is optimal and attained by $U_R(x)$ defined in (1.8). *Furthermore, the inequality* (1.14) *is invariant under the scaling* (1.9).

References

[1] Adimurthi, do Ó, J. M., Tintarev, K., *Cocompactness and minimizers for inequalities of Hardy-Sobolev type involving N-Laplacian*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **17** (2010), 467–477.

[2] Alvino, A., *Sulla diseguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz*, Boll. Un. Mat. Ital. A (5) **14** (1977), 148–156.

[3] Aubin, T., *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differ. Geom. **11** (1976), 573–598.

[4] Cassani, D., Ruf, B., Tarsi, C., *Group invariance and Pohozaev identity in Moser-type inequalities*, Commun. Contemp. Math. **15** (2013), 1250054 (20 pages).

[5] Cassani, D., Ruf, B., Tarsi, C., *Optimal Sobolev Type Inequalities in Lorentz Spaces*, Potential Anal. **39** (2013), 265–285.

[6] Cassani, D., Sani, F., Tarsi, C., *Equivalent Moser type inequalities in $\mathbb{R}^2$ and the zero mass case*, J. Funct. Anal. **267** (2014), 4236–4263.

[7] Cianchi, A., *A sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces*, Indiana Univ. Math. J. **45** (1996), 39–65.

[8] Costa, D., Tintalev, C., *Concentration profiles for the Trudinger-Moser functional are shaped like toy pyramids*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 676-692.

[9] Federer, H., Fleming, W., *Normal and integral currents*, Ann. of Math. (2) **72** (1960), 458–520.

[10] Horiuchi, T., Kumlin, P., *On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities involving critical and supercritical weights,* Kyoto J. Math. **52** (2012), 661–742.

[11] Ioku, N., "*Attainability of the best Sobolev constant in a ball*", Mathematische Annalen **375** (2019), 1–16.

[12] Ioku, N., Ishiwata, M., *A Scale Invariant Form of a Critical Hardy Inequality*, Int. Math. Res. Not. **18** (2015), 8830–8846.

[13] Ioku, N., Ishiwata, M., *A Note on the Scale Invariant Structure of Critical Hardy Inequalities,* Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **176** (2016), 97–120.

[14] Kesavan, S., Symmetrization & Applications, Series in Analysis, 3. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006.

[15] Maz′ya, V.G., *Classes of domains and imbedding theorems for function spaces*, Soviet Math. Dokl. **1** (1960), 882–885.

[16] Sano, M., Takahashi, F., *Scale invariance structures of the critical and the subcritical Hardy inequalities and their improvements*, Calc. Var. Partial Differential Equations **56** (2017), no. 3, Art. 69, 14 pp.

[17] Suyari, H., Fundamental Mathematics for Complex Systems, Makino shoten, Tokyo, 2010.

[18] Takahashi, F., *A simple proof of Hardy's inequality in a limiting case*, Arch. Math. **104** (2015), 77–82.

[19] Talenti, G., *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. **110** (1976), 353–372.

[20] Tsallis, C., *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*, J. Statist. Phys. **52** (1988), 479–487.

[21] Tsallis, C., Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World, Springer, NewYork, 2009.

Canceling effects in higher-order Hardy-Sobolev inequalities

Andrea Cianchi
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Firenze
Viale Morgagni 67/A, Firenze 50134, Italy

Norisuke Ioku
Mathematical institute, Tohoku University
6-3 Aramaki aza Aoba, Sendai, Japan

This report is based on the paper [CI]. Complete proofs can be found in [CI].

1 Introduction and main results

Let $d : \Omega \to (0, \infty)$ be a function which agrees with the distance function in such neighborhood of $\partial\Omega$, and enjoys the same regularity properties, but in the whole of Ω. Given $p \in [1, \infty]$ and $\alpha \in \mathbb{R}$, we denote by $L^p(\Omega, d^\alpha)$ the weighted Lebesgue space equipped with the norm defined as

$$\|u\|_{L^p(\Omega,d^\alpha)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p d(x)^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

for a measurable function u in Ω. Moreover, if $m \in \mathbb{N}$, the notation $W^{m,p}(\Omega, d^\alpha)$ is adopted for the associated Sobolev space of m-times weakly differentiable functions u in Ω endowed with the norm

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega,d^\alpha)} = \sum_{j=0}^{m} \|\nabla^j u\|_{L^p(\Omega,d^\alpha)},$$

where $\nabla^j u$ stands for the vector of all derivatives of u of order j. We also simply denote $\nabla^1 u$ by ∇u; also, $\nabla^0 u$ is nothing but u. The notation $W_0^{m,p}(\Omega, d^\alpha)$ is devoted to the closure of $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega, d^\alpha)$.

A classical Hardy-Sobolev inequality asserts that if Ω is a bounded Lipschitz domain, and

$$\alpha \neq p - 1,$$

then there exists a constant C such that

$$\left\| \frac{u}{d} \right\|_{L^p(\Omega,d^\alpha)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega,d^\alpha)} \tag{1.1}$$

for every $u \in W_0^{1,p}(\Omega, d^\alpha)$ [Ku, Theorem 8.4]. On the other hand, inequality (1.1) fails for the critical value $\alpha = p-1$.

The main purpose of the present paper is to show that, this notwithstanding, suitable higher-order versions of inequality (1.1), which cannot just be obtained from (1.1) via iteration, do hold even when $\alpha = p-1$.
A prototypal second-order inequality may help to grasp the spirit of our results. Assume that Ω has a smooth boundary, so that d is also smooth in a neighborhood of $\partial\Omega$. Let $u \in W_0^{2,p}(\Omega, d^{p-1})$. A standard property of the distance function ensures that $|\nabla d| = 1$ in a neighborhood of $\partial\Omega$, whence

$$\left|\nabla\left(\frac{u}{d}\right)\right| = \left|\frac{\nabla u}{d} - u\frac{\nabla d}{d^2}\right| \leq \frac{|\nabla u|}{d} + \frac{|u|}{d^2} \tag{1.2}$$

a.e. in the same neighborhood. Inequality (1.1) cannot be exploited to infer that the functions $\frac{|\nabla u|}{d}$ and $\frac{|u|}{d^2}$ belong to $L^p(\Omega, d^{p-1})$. In fact, membership to $L^p(\Omega, d^{p-1})$ of neither of these functions is guaranteed under the sole assumption that $u \in W_0^{2,p}(\Omega, d^{p-1})$ (this can be verified, for instance, by taking $\Omega = (0,1)$, and considering functions $u(x)$ decaying like $x\log^{-\alpha}(\frac{1}{x})$ as $x \to 0^+$, with $\alpha \in (0, \frac{1}{p}]$). Nevertheless, we show that the inequality

$$\left\|\frac{u}{d}\right\|_{W^{1,p}(\Omega, d^{p-1})} \leq C\|u\|_{W^{2,p}(\Omega, d^{p-1})}, \tag{1.3}$$

holds for some constant C, and for every $u \in W_0^{2,p}(\Omega, d^{p-1})$. This is possible thanks to a canceling effect which allows the leftmost side of (1.2) to have stronger integrability properties than each addend on its rightmost side.
In the case when $p = 1$, such a striking phenomenon has been elucidated in remarkable contributions, by which ours is inspired, of Castro and Wang [CW], for $n = 1$, and of Castro, Dávila and Wang [CDW1, CDW2], for any $n \geq 1$. In this case, non-weighted Lebesgue and Sobolev norms appear in (1.1) and (1.3), and in their higher-order counterparts from [CDW2].

The arbitrary-order version of inequality (1.3) to be established asserts that, if $1 \leq p < \infty$, and $k, m \in \mathbb{N}$, with $m \geq 2$, and $1 \leq k \leq m-1$, then there exists a constant C such that

$$\left\|\frac{u}{d^{m-k}}\right\|_{W^{k,p}(\Omega, d^{p-1})} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega, d^{p-1})} \tag{1.4}$$

for every $u \in W_0^{m,p}(\Omega, d^{p-1})$.

Inequality (1.4) is in turn a special instance of our most general result, stated in the following theorem, where Sobolev type spaces associated with different Lebesgue norms and distance weights are allowed on the two sides of the relevant inequality.

Theorem 1.1. *Let Ω be a bounded open set with a smooth boundary in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, and let $k, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, and $1 \leq k \leq m-1$. Assume that $1 \leq p \leq q < \infty$, and*

$$\frac{1}{q} \geq \frac{n - p(m-k)}{np}. \tag{1.5}$$

Let

$$r \geq \frac{q(n-1) - p(n-q)}{p}. \tag{1.6}$$

Then, there exists a constant C such that

$$\left\| \frac{u}{d^{m-k}} \right\|_{W^{k,q}(\Omega, d^r)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega, d^{p-1})} \tag{1.7}$$

for every $u \in W_0^{m,p}(\Omega, d^{p-1})$.

Remark 1.2. Conditions (1.5) and (1.6) in Theorem 1.1 are sharp. The assumption that $k \geq 1$ is also sharp, since inequality (1.7) breaks down for $k = 0$, as pointed out in the discussion above.

2 Inequalities in the half space $\mathbb{R}^n_+$

This section is devoted to a Hardy-Sobolev inequality in the half-space, contained in Theorem 2.1 below. This is a key step towards the proof of Theorem 1.1.

Theorem 2.1. *Let $k, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ and $1 \leq k \leq m-1$. Assume that $1 \leq p \leq q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\beta - \alpha}{n}$, $\alpha < k + \frac{p-1}{p}$, and $\alpha \leq \beta \leq \alpha + (m-k)$. Then, there exists a constant C such that*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\beta q} \left| \nabla^k \left(\frac{u(x)}{x_n^{m-k}} \right) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p} \left| \nabla^m u \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.1}$$

for every $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

The proof of Theorem 2.1 rests upon several lemmas. The first one is a one-dimensional version of its, in the special case when $p = q$ and $\alpha = \beta$.

Lemma 2.2. *Let $k, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ and $1 \leq k \leq m-1$. Assume that $1 \leq p < \infty$ and $\alpha < k + \frac{p-1}{p}$. Then there exists a constant C such that*

$$\left(\int_0^\infty r^{\alpha p} \left| \frac{d^k}{dr^k} \left(\frac{f(r)}{r^{m-k}} \right) \right|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_0^\infty r^{\alpha p} \left| \frac{d^m f}{dr^m}(r) \right|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2}$$

for every $f \in C_0^\infty(0, \infty)$.

Proof. This lemma can be proved by following the idea in [CW]. An application of Taylor's formula, with remainder term in integral form, tells us that

$$\frac{d^k}{dr^k} \left(\frac{f(r)}{r^{m-k}} \right) = \frac{1}{(m-k-1)!} \int_0^r \frac{d^m f}{ds^m}(s) \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{m-k-1} \left(\frac{s}{r}\right)^{k-1} \frac{s}{r^2} ds \quad \text{for } r > 0, \tag{2.3}$$

see [CW, Proof of Theorem 1.2]. Hence, since $\left(1 - \frac{s}{r}\right)^{m-k-1} \leq 1$ if $0 \leq s \leq r$, one has that

$$\left| \frac{d^k}{dr^k} \left(\frac{f(r)}{r^{m-k}} \right) \right| \leq \frac{1}{r^{(k+1)}(m-k-1)!} \int_0^r s^k \left| \frac{d^m f}{ds^m}(s) \right| ds \quad \text{for } r > 0. \tag{2.4}$$

Owing to the assumption that $\alpha < k + \frac{p-1}{p}$, inequalities (2.3) and (2.4), combined with a classical one-dimensional Hardy inequality [Ku, Theorem 5.1], ensure that

$$\left(\int_0^\infty r^{\alpha p}\left|\frac{d^k}{dr^k}\left(\frac{f(r)}{r^{m-k}}\right)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{(m-k-1)!}\left(\int_0^\infty r^{(\alpha-k-1)p}\left(\int_0^r s^k\left|\frac{d^m f}{ds^m}(s)\right| ds\right)^p dr\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le C\left(\int_0^\infty r^{\alpha p}\left|\frac{d^m f}{dr^m}(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}$$

for some constant C. $\square$

The following result is a kind of combinatorial identity. In its statement, we use the abridged notation

$$[k] = \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Lemma 2.3. *Let $k \in \mathbb{N}$, and let $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Given $I \subset [k]$, define $a_\emptyset = 0$, and $a_I = \sum_{i\in I} a_i$ if $I \neq \emptyset$. Then*

$$k!\prod_{i=1}^k a_i = \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l}\sum_{\substack{I\subset[k]\\ \#I=l}} (a_I + s)^k \quad \text{for } s \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

where $\#I$ denotes the cardinality of I.

The next lemma is concerned with the special case when $\alpha = \beta$, and hence $p = q$, in Theorem 2.1.

Lemma 2.4. *Let $k, m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$ and $1 \le k \le m-1$. Assume that $1 \le p < \infty$ and $\alpha < k + \frac{p-1}{p}$. Then there exists a constant C such that*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p}\left|\nabla^k\left(\frac{u(x)}{x_n^{m-k}}\right)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p}\,|\nabla^m u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.6}$$

for every $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

Our last intermediate step consists in an estimate for the left-hand side of inequality (2.2), involving k-th order derivatives of $u(x)x_n^{k-m}$, in terms of the k-th and $(k+1)$-th order derivatives of the same expression, but with different weights. Note that no condition on the trace of u on $\partial\mathbb{R}^n_+$ is required here.

Lemma 2.5. *Let $k, m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$ and $1 \le k \le m-1$. Assume that $1 \le p \le q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\beta-\alpha}{n}$, and $\alpha \le \beta \le \alpha + 1$. Then, there exists a constant C such that*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\beta q}\left|\nabla^k\left(\frac{u(x)}{x_n^{m-k}}\right)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.7}$$
$$\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{(\alpha+1)p}\left|\nabla^{k+1}\left(\frac{u(x)}{x_n^{m-k}}\right)\right|^p + x_n^{\alpha p}\left|\nabla^k\left(\frac{u(x)}{x_n^{m-k}}\right)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

for every $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

3 Inequalities in bounded domains

Given a bounded smooth open set Ω with smooth boundary in $\mathbb{R}^n$, with $n \geq 1$, we make use of an orthogonal coordinate system which, in a sense, rectifies $\partial\Omega$ in a suitable neighborhood inside Ω. By the latter expression, we mean a subset Ω_ε of Ω of the form

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x) < \varepsilon\} \tag{3.1}$$

for some $\varepsilon > 0$. Let ε_0 be small enough for d to agree, in Ω_{ε_0}, with the distance function from $\partial\Omega$. It is well known that ε_0 can be chosen so small that, for every $x \in \Omega_{\varepsilon_0}$, there exists a unique $y_x \in \partial\Omega$ fulfilling

$$x = y_x + d(x)\nu(y_x), \tag{3.2}$$

where ν denotes the inward unit normal vector on $\partial\Omega$.
Since $\partial\Omega$ is smooth, for every $x_0 \in \partial\Omega$ there exist an open neighborhood $\mathcal{U}(x_0)$ of x_0 on $\partial\Omega$, a radius $r_0 > 0$, and a smooth diffeomorphism

$$\widetilde{\Phi} : B^{n-1}_{r_0}(0) \to \mathcal{U}(x_0).$$

Next, define $\Phi : B^{n-1}_{r_0}(0) \times (0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ as

$$\Phi(y) = \widetilde{\Phi}(\widetilde{y}) + y_n\nu(\widetilde{\Phi}(\widetilde{y})) \quad \text{for } y \in B^{n-1}_{r_0}(0) \times (0, \varepsilon_0),$$

where $y = (\widetilde{y}, y_n)$, and $\widetilde{y} = (y_1, \cdots, y_{n-1})$. By (3.2),

$$y_n = d(\Phi(y)) \quad \text{for } y \in B^{n-1}_{r_0}(0) \times (0, \varepsilon_0). \tag{3.3}$$

On setting

$$\mathcal{N}(x_0) = \{x \in \Omega_{\varepsilon_0} : y_x \in \mathcal{U}(x_0)\}, \tag{3.4}$$

one can prove that the map $\Phi : B^{n-1}_{r_0}(0) \times (0, \varepsilon_0) \to \mathcal{N}(x_0)$ is a smooth diffeomorphism. In particular,

$$\mathcal{N}(x_0) = \Phi(B^{n-1}_{r_0}(0) \times (0, \varepsilon_0)).$$

As a consequence, there exists a positive constant C such that

$$\frac{1}{C}\int_{B^{n-1}_{r_0}(0)}\int_0^{\varepsilon_0} |f(\Phi(y))|dy_n d\widetilde{y} \leq \int_{\mathcal{N}(x_0)} |f(x)|dx \leq C\int_{B^{n-1}_{r_0}(0)}\int_0^{\varepsilon_0} |f(\Phi(y))|dy_n d\widetilde{y} \tag{3.5}$$

for every function $f \in L^1(\mathcal{N}(x_0))$.

In preparation for the proof of Theorem 1.1, we establish the following local version.

Lemma 3.1. *Let Ω, p, q, r, m, k be as in the statement of Theorem 1.1. Given any point $x_0 \in \partial\Omega$, let $\mathcal{N}(x_0)$ be defined as in (3.4). Then there exists a constant C such that*

$$\left(\int_{\mathcal{N}(x_0)} d(x)^r \left|\nabla^k\left(\frac{u(x)}{d(x)^{m-k}}\right)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\sum_{l=1}^m \left(\int_{\mathcal{N}(x_0)} d(x)^{p-1}|\nabla^l u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.6}$$

for every $u \in C_0^\infty(\mathcal{N}(x_0))$.

References

[Ad1] D.R. Adams, Traces of potentials arising from translation invariant operators, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa* **25** (1971), 203–217.

[Ad2] D.R. Adams, A trace inequality for generalized potentials, *Studia Math.* **48** (1973), 99–105.

[CI] A. Cianchi & N. Ioku, Canceling effects in higher-order Hardy-Sobolev inequalities, *Calc. Var.* **56** (2017), 56:31.

[CW] H. Castro & H. Wang, A Hardy type inequality for $W^{m,1}(0,1)$ functions, *Calc. Var.* **3-4** (2010), 525–531.

[CDW1] H. Castro, J. Dávila & H. Wang, A Hardy type inequality for $W_0^{2,1}(\Omega)$ functions, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **349** (2011), 765–767.

[CDW2] H. Castro, J. Dávila & H. Wang, A Hardy type inequality for $W_0^{m,1}(\Omega)$ functions, *J. Eur. Math. Soc.* **15** (2013), 145–155.

[CEG] A. Cianchi, D.E. Edmunds & P.Gurka, On weighted Poincaré inequalities, *Math. Nachr.* **180** (1996), 15-41.

[HKM] J. Heinonen, T. Kilpeläinen & O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Oxford University Press, New York, 1993.

[Ku] A. Kufner, *Weighted Sobolev spaces*, Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig, 1980.

[Ho1] T. Horiuchi, The imbedding theorems for weighted Sobolev spaces, *J. Math. Kyoto Univ.* **29** (1989), 365–403.

[Ho2] T. Horiuchi, The imbedding theorems for weighted Sobolev spaces. II, *Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. Ser. A* **23** (1991), 11–37.

[Ma] V.G. Maz'ya, *Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations*, Springer, Berlin, 2011.

[MS] M.K.V. Murthy & G. Stampacchia, Boundary value problems for some degenerate-elliptic operators, *Ann. Mat. Pura Appl.* **80** (1968), 1–122.

[OK] B. Opic & A. Kufner, *Hardy-type inequalities*, Longman Scientific & Technical, New York, 1990.

ON THE BOUNDEDNESS OF COMPOSITION OPERATORS ON REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACES WITH ANALYTIC POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS

ISAO ISHIKAWA, MASAHIRO IKEDA AND YOSHIHIRO SAWANO

Abstract. This note reports what is obtained in an on-going work done jointly with Masahiro Ikeda and Isao Ishikawa.

1. Main theorem

We denote by m_z the pointwise multiplication operator on $L^2(\widehat{u})$: $m_z(h)(\xi) := e^{-2\pi i z^\top \xi} h(\xi)$. For each $n \in \mathbb{N}$, the space $P_n \subset \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d]$ stands for the linear space of all polynomials having (total) degree at most n. We define

$$\mathcal{G}(u) = \{A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) \,:\, \hat{u}(A^\top \xi) \geq \lambda \hat{u}(\xi) \text{ for some } \lambda > 0\}.$$

If the decay of $\widehat{u}$ is strong enough, the boundedness of the composition mapping forces f to be affine as our main result below shows.

Theorem 1.1. *Let $u \in C \cap L^2$ be such that $\widehat{u} \in L^1 \cap L^\infty$ and that $\widehat{u}$ is non-negative almost everywhere, and let $k(x, y) := u(x - y)$, so that k is positive definite and hence it generates a reproducing kernel Hilbert space H_k. We impose the following four conditions on u:*

(1) *for any $a > 0$, there exists $c_a > 0$ such that $|\mathcal{F}u(\xi)| \leq c_a e^{-a|\xi|}$,*
(2) $\displaystyle \sup_{z \in \mathbb{C}} \left(\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\sup_{P \in P_n \setminus \{0\}} \frac{\|m_z P\|_{L^2(\hat{u})}}{\|P\|_{L^2(\hat{u})}}} \right) < \infty,$
(3) *there exists $Q \in \mathcal{G}(u)$ such that $-Q \in \mathcal{G}(u)$,*
(4) *$\mathcal{G}(u)$ spans $\mathrm{M}_d(\mathbb{R})$, that is, $\langle \mathcal{G}(u) \rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$.*

Then for any open set $U \subset R^d$ and any map $f : U \to \mathbb{R}^d$, the map f is a restriction of an affine map of the form

$$f(x) = Ax + b$$

with $A \in \mathcal{G}(u)$ and $b \in \mathbb{R}^d$ if and only if $g \circ f \in H_{k_{U^2}}$ for all $g \in H_k$ and the composition operator $g \in H_k \to g \circ f \in H_{k|_{U^2}}$ is a bounded linear operator.

Yoshihiro Sawano is partially supported by Riken, Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (19K03546), the Japan Society for the Promotion of Science and Peoplefs Friendship University of Russia.

References

[1] I. Ishikawa, M. Ikeda and Y. Sawano, On the boundedness of composition operators on reproducing kernel Hilbert spaces with analytic positive definite functions, in preparation.

Yoshihiro Sawano: Department of Mathematics and Information Sciences, Tokyo Metropolitan University, 1-1 Minami-Ohsawa, Hachioji, 192-0397, Japan

E-mail address: yoshihiro-sawano@celery.ocn.ne.jp

Isao Ishikawa: RIKEN AIP, Tokyo, Japan

E-mail address: isao.ishikawa@riken.jp

RIKEN AIP, Tokyo, Japan

E-mail address: masahiro.ikeda@riken.jp

Masahiro Ikeda: RIKEN AIP, Tokyo, Japan

CLOSED SUBSPACES IN MORREY SPACES, MORREY 空間の閉部分空間について

BY YOSHIHIRO SAWANO

ABSTRACT. The goal of this report is to collect some important closed subspaces. We give many examples showing that these closed spaces are different. This is based on joint works with Denny Ivanal Hakim.

1. MORREY SPACES

1.1. **Definition.** We aim to consider various closed subspaces of Morrey spaces.

Definition 1.1. Let $0 < q \le p \le \infty$. For an $L^q_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$-function f, its Morrey norm is defined by

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q {\rm d}y\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.1}$$

As the following theorem shows, we can say that Lebesgue spaces are realized as a special case of Morrey spaces.

Theorem 1.2. *For $0 < p < \infty$, $\mathcal{M}^p_p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ with coincidence of norms.*

Definition 1.3. Let $0 < q \le p \le \infty$. For an $L^q_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$-function f, its local Morrey norm is defined by

$$\|f\|_{{\rm L}\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^{n+1}_+, x=0} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q {\rm d}y\right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.2. **A prominent example.**

Example 1 (Self-similar decreasing sequence for $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$)**.** We let $p > q > 0$ and $R > 1$ be fixed so that

$$(1+R)^{-\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{q}}(1+R)^{-\frac{1}{q}}. \tag{1.2}$$

It is noteworthy that the case where $R = 2$ corresponds to the ternary Cantor set. For a vector $\varepsilon \in \{0,1\}^n$, we define an affine transformation T_ε by $T_\varepsilon(x) \equiv$

Yoshihiro Sawano is partially supported by Riken, Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (19K03546), the Japan Society for the Promotion of Science and Peoplefs Friendship University of Russia.

$\dfrac{1}{1+R}x+\dfrac{R}{1+R}\varepsilon \quad (x \in \mathbb{R}^n)$. Let $E_0 \equiv [0,1]^n$ and $E_{j,0} \equiv [0,(1+R)^{-j}]^n$. Suppose that we have defined $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_j$, $j \in \mathbb{N}$. Define $E_{j+1} \equiv \bigcup_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} T_\varepsilon(E_j)$. Then we can show that

$$\|\chi_{E_j}\|_{\mathcal{M}^p_q} \sim (1+R)^{-j\frac{n}{p}} = \|\chi_{E_{j,0}}\|_{\mathcal{M}^p_q} = \|\chi_{E_{j,0}}\|_{L^p} = \|\chi_{E_j}\|_{L^q}. \tag{1.3}$$

2. Definition of closed subspaces

We deal with closed subspaces of Morrey spaces. As we will see, we can generate closed subspaces starting from linear subspaces satisfying the lattice property. The following is the key ingredient for us to create closed subspaces.

Definition 2.1 ($U\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$)**.**

(1) A linear subspace $U(\mathbb{R}^n) \subset L^0(\mathbb{R}^n)$ enjoys the *lattice property* if $g \in U$ if $f \in U$ and $|g| \le |f|$.
(2) Let $U(\mathbb{R}^n) \subset L^0(\mathbb{R}^n)$ be a linear space with lattice property. For $0 < q \le p < \infty$, define $U\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \equiv \overline{U(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)}^{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)}$.

The spaces of U we envisage are the following. Due to its importance we state them as the definitions.

Definition 2.2 ($\overline{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$, $\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}^p_q(\Omega)$)**.** Let $0 < q \le p < \infty$.

(1) The case where $U = L^\infty(\mathbb{R}^n)$: The *bar space* $\overline{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ stands for the closure of $L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ with respect to $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(2) The case where $U = L^0_{\rm c}(\mathbb{R}^n) \equiv \{f \in L^0(\mathbb{R}^n) \,:\, {\rm supp}(f) \text{ is compact }\}$: The *star space* $\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ stands for the closure in $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ of $L^0_{\rm c}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(3) The case where $U = L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^0_{\rm c}(\mathbb{R}^n)$: Denote by $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$, the *tilde subspace*, the $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$-closure of $L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n) = L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(4) Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a measurable set. Define $L^0(\Omega)$ to be the subset of $L^0(\mathbb{R}^n)$ which consists of all measurable functions which vanish almost everywhere outside Ω. Let $U = L^0(\Omega)$. Then we obtain the closed subspace $\mathcal{M}^p_q(\Omega)$ of all $f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ for which f vanishes almost everywhere outside Ω.

We do similar things for local Morrey spaces.

Needless to say, $L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n)$ is dense in $L^p(\mathbb{R}^n)$ for $0 < p < \infty$. Hence, the above definition is significant only when $0 < q < p < \infty$.

Example 2. Let $0 < q \le \tilde{q} \le p < \infty$. We may take $U = \mathcal{M}^p_{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)$. Note that $U\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ differs from $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.

Recall that the Morrey space $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ with $0 < q \le p < \infty$ is defined as the set of all $f \in L^q_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ for which $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup\limits_{r>0} m(f,p,q;r) < \infty$, where

$$m(f,p,q;r) \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q {\rm d}y\right)^{\frac{1}{q}} \ (r > 0).$$

Using $m(f,p,q;r)$, we can consider the following subspaces.

Definition 2.3 ($V_0\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$, $V_\infty\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$, $V^{(*)}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$, $V^{(*)}_{0,\infty}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$)**.** Let $0 < q \le p < \infty$.

(1) The *vanishing Morrey space* $V_0\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ *at* 0 is defined by
$$V_0\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \equiv \{f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \,:\, \lim_{r\downarrow 0} m(f,p,q;r) = 0\}.$$

(2) The *vanishing Morrey space* $V_\infty\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ *at infinity* is defined by
$$V_\infty\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \,:\, \lim_{r\to\infty} m(f,p,q;r) = 0\right\},$$

(3) The space $V^{(*)}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ is defined as the set of all functions $f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ such that $\lim\limits_{N\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \displaystyle\int_{B(x,1)} |f(y)|^q \chi_{\mathbb{R}^n\setminus B(N)}(y){\rm d}y\right) = 0.$

(4) The space $V^{(*)}_{0,\infty}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ is defined as the intersection of these three spaces.

Note that $V^{(*)}_{0,\infty}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ coincides with $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 2.4. *Let* $0 < q \le p < \infty$. *Then*
$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset V_0\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \cap V_\infty\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \cap V^{(*)}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n).$$
In particular, $L^p(\mathbb{R}^n) \subset V^{(*)}_{0,\infty}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) = \widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n) \cap \overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.

Definition 2.5 ($\overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$)**.** Let $0 < q \le p < \infty$. Then define the *Zorko subspace* $\overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ by
$$\overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \,:\, \lim_{y\to 0} f(\cdot + y) = f \text{ in } \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)\right\}.$$
The Zorko subspace is also called the *diamond subspace*.

3. Characterizations and inclusions

As before, we are interested in the case of $p \ne q$. If $q \ge 1$, then we have the following characterization:

Theorem 3.1. *Let* $1 \le q \le p < \infty$. *Then* $f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ *belongs to* $\overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ *if and only if* f *belongs to the closure with respect to* $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ *of the set of all functions* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *such that* $\partial^\alpha f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ *for all* $\alpha \in {\mathbb{N}_0}^n$.

Theorem 3.2. *Let $0 < q \le p < \infty$. Then $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n) \subset \overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.*

Proof. This is because the translation $f \mapsto f(y+\cdot)$ is continuous in $L^p(\mathbb{R}^n)$. We use convolution to conclude $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n) \subset \overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$. □

Theorem 3.3. *Let $0 < q \le p < \infty$. Then $\overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n) \subset V_0\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.*

Proof. Simply observe that $L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \subset V_0\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$. □

We compare $\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ with $V^{(*)}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 3.4. *Let $0 < q \le p < \infty$. Then $\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n) \subset V^{(*)}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.*

Proof. Simply observe that $L^0_{\rm c}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \subset V^{(*)}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$. □

We will show that $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n) = V^{(*)}_{0,\infty}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 3.5. *Let $0 < q \le p < \infty$. Then $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n) = V^{(*)}_{0,\infty}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.*

Proof of $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n) \subset V^{(*)}_{0,\infty}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$. Since $L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n) \subset V^{(*)}_{0,\infty}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$, we have

$$\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n) \subset V^{(*)}_{0,\infty}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$$

by taking the closure with respect to $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$. □

Proof of $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n) \supset V^{(*)}_{0,\infty}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$. To verify the converse inclusion, we let $f \in V^{(*)}_{0,\infty}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$. Fix $R_1, R_2, S > 0$ so that $R_1 < R_2$. Then

$$\begin{aligned}\|f - \chi_{[0,R]}(|f|)\chi_{B(R)}f\|_{\mathcal{M}^p_q} \le{}& \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\ge R_2} m(f,p,q;r) + \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\le R_1} m(f,p,q;r)\\ &+ \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus B(S), R_1\le r\le R_2} m(f,p,q;r)\\ &+ \sup_{x\in B(S), R_1\le r\le R_2} m(f-\chi_{[0,R]}(|f|)\chi_{B(R)}f,p,q;r).\end{aligned}$$

We note that

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in B(S), R_1\le r\le R_2} m(f-\chi_{[0,R]}(|f|)\chi_{B(R)}f,p,q;r)\\ &\le C(R_1,R_2,S,r)\|f-\chi_{[0,R]}(|f|)\chi_{B(R)}f\|_{L^q(B(S+R_2))}.\end{aligned}$$

Thus, by the Lebesgue convergence theorem

$$\begin{aligned}&\limsup_{R\to\infty}\|f-\chi_{[0,R]}(|f|)\chi_{B(R)}f\|_{\mathcal{M}^p_q}\\ &\le \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ r\ge R_2}} m(f,p,q;r) + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ r\le R_1}} m(f,p,q;r) + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus B(S)\\ R_1\le r\le R_2}} m(f,p,q;r).\end{aligned}$$

If we let $R_1 \downarrow 0$, $R_2 \to \infty$ and $S \to \infty$, we have

$$\limsup_{R\to\infty} \|f - \chi_{[0,R]}(|f|)\chi_{B(R)}f\|_{\mathcal{M}^p_q} = 0.$$

Since $\chi_{[0,R]}(|f|)\chi_{B(R)}f \in L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}\ n)$, we obtain the desired result. $\square$

4. Concrete examples

Example 3. Let $0 < q < p < \infty$, and let $f(x) \equiv |x|^{-\frac{n}{p}}, x \in \mathbb{R}^n$.

(1) $f = \lim\limits_{k\to\infty} \chi_{B(k)}f$ fails in $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(2) $\lim\limits_{k\to\infty} \chi_{B(k^{-1})}f = 0$ fails in $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(3) We can conclude that an analogue of the Lebesgue convergence theorem fails for Morrey spaces.

Example 4. Let $0 < q \le p < \infty$. Then since $\chi_{Q(1)} \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\chi_{Q(1)} \in V_0\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \cap V_\infty\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \cap V^{(*)}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \cap \overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n).$$

In particular, $\chi_{Q(1)} \in \widetilde{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n) = V^{(*)}_{0,\infty}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) = \overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n) \cap \overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.

Example 5. Let $0 < q < p < \infty$. Define $f(x) \equiv |x|^{-\frac{n}{p}}\chi_{B(1)}(x)$ for $x \in \mathbb{R}^n$.

(1) $f \in \overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ since f is compactly supported.
(2) $f \notin \overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ since f behaves like $|\cdot|^{-\frac{n}{p}}$ near the origin.
(3) $f \notin \widetilde{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ since $f \notin \overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(4) $f \notin V_0\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ since f behaves like $|\cdot|^{-\frac{n}{p}}$ near the origin.
(5) $f \in V_\infty\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ since f is compactly supported.
(6) $f \in V^{(*)}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ since f is compactly supported.
(7) $f \notin \overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ since $f \notin \overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.

Example 6. Let $0 < q < p < \infty$. Define $f(x) \equiv |x|^{-\frac{n}{p}}\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B(1)}(x)$ for $x \in \mathbb{R}^n$.

(1) Since f behaves like $|\cdot|^{-\frac{n}{p}}$ away from the origin, $f \notin \overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(2) Since $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$, $f \in \overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(3) Since $f \notin \overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$, $f \notin \widetilde{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(4) Since $f \in \overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$, $f \in V_0\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(5) Since f behaves like $|\cdot|^{-\frac{n}{p}}$ away from the origin, $f \notin V_\infty\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(6) Since $f(x) \to 0$ as $x \to \infty$, $f \in V^{(*)}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(7) If $\psi \in C^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n)$ satisfies $\chi_{B(1)} \le \psi \le \chi_{B(2)}$, then $f - k \in L^p(\mathbb{R}^n) \subset \overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$, where $k(x) \equiv |x|^{-\frac{n}{p}}(1 - \psi(x))$ for $x \in \mathbb{R}^n$. Since $k \in \overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$, we have $f \in \overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.

Example 7. Let $0 < q \le p < \infty$, and let $f(x) \equiv (|x|^2+1)^{-\frac{n}{2p}}$ for $x \in \mathbb{R}^n$.

(1) Since f behaves like $|\cdot|^{-\frac{n}{p}}$ away from the origin, $f \notin \overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(2) Since $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$, $f \in \overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(3) Since $f \notin \overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$, $f \notin \widetilde{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(4) Since $f \in V_0\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$, $f \in \overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(5) Since f behaves like $|\cdot|^{-\frac{n}{p}}$ away from the origin, $f \notin V_\infty\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(6) Since f behaves like $|\cdot|^{-\frac{n}{p}}$ away from the origin, $f \in V^{(*)}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(7) Since $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ and satisfies $\partial^\alpha f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ for all multiindexes α, $f \in \overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.

Example 8. Let

$$H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[0,1]}(t-k+1-k^{\frac{p}{p-q}}) \sin^3(2^{k+1}\pi(t-k+1-k^{\frac{p}{p-q}})) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Let $G = \mathrm{supp}(H)$.

(1) $H \notin \overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R})$, since $|H|$ and χ_G behave almost similarly.
(2) Since $|H| \le \chi_G \in \overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R})$, we see that $H \in \overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R})$.
(3) Since $H \notin \overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R})$, $H \notin \widetilde{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R})$.
(4) Since $H \in \overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R})$, $H \in V_0\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R})$.
(5) Since $|H|$ and χ_G behave almost similarly, $H \notin V_\infty\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R})$.
(6) Since $|H|$ and χ_G behave almost similarly, $H \notin V^{(*)}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R})$.
(7) $H \notin \overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.

Example 9. Let $0 < q < p < \infty$. Show that $\mathrm{L}\overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ and $\mathrm{L}\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ are different in the sense that one is not contained in another. Hint: Let $f(x) \equiv \chi_{B(1)}(x)|x|^{-\frac{n}{p}}$ and $g(x) \equiv \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(1)}(x)|x|^{-\frac{n}{p}}$ for $x \in \mathbb{R}^n$. Show that $f \in \mathrm{L}\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n) \setminus \mathrm{L}\overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ and that $g \in \mathrm{L}\overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n) \setminus \mathrm{L}\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.

Example 10. Let $0 < q < p < \infty$, and let $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}, x \in \mathbb{R}^n$.

(1) Let E be the set defined above. Then $\chi_E \in \mathrm{L}\overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n) \setminus \mathrm{L}\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(2) $\chi_{B(1)} f \in \mathrm{L}\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n) \setminus \mathrm{L}\overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
(3) $f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \setminus (\mathrm{L}\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n) \cup \mathrm{L}\overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n))$.

5. Historical remarks

- The definition of vanishing Morrey spaces at 0 in Definition 2.3 goes back to the work of Vitanza [12].

- We refer to [9] for commutators acting on these spaces. See [7, Definition 1.1], [13, Definition 2.23] and [10, Definition 4.5] for bar spaces, star spaces and tilde spaces, respectively. Density of simple functions in $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ can be found in [6, Remark 3.2]. See [6, Lemmas 3.3 and 6.4] for different characterizations of $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
- As an application of the theory of closed subspaces in Morrey spaces, we can obtain some characterization of closed subpsaces; see [6, Lemmas 4.1, 4.2 and 6.2]. We refer to [13, Theorem 2.29] for more.
- The Morrey space $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ does not have $C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ as a dense closed subspace; see [11, Proposition 2.16].
- Vanishing Morrey spaces at 0 are studied from various aspects. See [2] and [3] for fractional integral operators and Marcinkiewicz intergrals associated with Schrodinger operators, respectively. Cao and Chen handled Toeplitz-type operators in [5].
- Zorko explained that the set of smooth functions in Morrey spaces can not approximate Morrey spaces [14, p. 587]. Actually as in Theorem 3.1, she pointed out in [14, Proposition 3] that the translation and the convolution are closely related.
- We refer to [13, Definition 2.23] for $\overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ and to [10, Theorem 4.3] for $\widehat{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
- See [6, Lemma 2.1] for Theorem 3.1.
- The space $\tilde{L}^{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ in [4] is nothing but the diamond subspace.
- Adams pointed out that any element in diamond subspaces can be approximated by the smooth functions in his textbook [1].
- See [6, Lemma 3.1] for a different characterization of $\overline{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
- Example 8 can be found [8, Example 1.4].

References

[1] D.R. Adams, Morrey spaces, Lecture Notes in Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015. xv+121 pp.

[2] A. Akbulut, V.S. Guliyev, S. Celik and M.N. Omarova, Fractional integral associated with Schrodinger operator on vanishing generalized Morrey spaces, J. Math. Inequal. **12** (2018), no. 3, 789–805.

[3] A. Akbulut and O. Kuzu, Marcinkiewicz integrals with rough kernel associated with Schrodinger operator on vanishing generalized Morrey spaces, Azerb. J. Math. **4** (2014), no. 1, 40–54.

[4] B.T. Bilalov and A.A. Quliyeva, On basicity of exponential systems in Morrey-type spaces, Internat. J. Math. **25** (2014), no. 6, 1450054, 10 pp.

[5] X. Cao and D. Chen, The boundedness of Toeplitz-type operators on vanishing-Morrey spaces, Anal. Theory Appl. **27** (2011), no. 4, 309–319.

[6] L. Caso, R. D'Ambrosio and S. Monsurro, Some remarks on spaces of Morrey type, Abstr. Appl. Anal. 2010, Art. ID 242079, 22 pp.

[7] D.I. Hakim, Complex Interpolation of Certain Closed Subspaces of Morrey spaces, Tokyo J. Math. **41** (2018), no. 2, 487–514.

[8] D.I. Hakim and Y. Sawano, Complex interpolation of various subspaces of Morrey spaces, Sci. China Math. online.

[9] M.A. Ragusa, Commutators of fractional integral operators on Vanishing-Morrey spaces, J. Global Optim., **40** (1-3) (2008), 361–368.

[10] Y. Sawano and H. Tanaka. The Fatou property of block spaces, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **22** (2015), 663–683.

[11] H. Triebel, Hybrid function spaces, heat and Navier-Stokes equations, EMS Tracts in Mathematics, **24**. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2014. x+185 pp.

[12] C. Vitanza, Functions with vanishing Morrey norm and elliptic partial differential equations. In: Proceedings of Methods of Real Analysis and Partial Differential Equations, Capri, pp. 147150. Springer, 1990.

[13] W. Yuan, W. Sickel, and D. Yang, Interpolation of Morrey-Campanato and related smoothness spaces, Sci. Math. China. **58** (2015), 1835–1908.

[14] C.T. Zorko, Morrey space, Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986), 586–592.

Department of Mathematics and Information Sciences, Tokyo Metropolitan University, 1-1 Minami-Ohsawa, Hachioji, 192-0397, Japan

E-mail address: `yoshihiro-sawano@celery.ocn.ne.jp`

Uncertainty Relations For Quantum Channels

Kenjiro Yanagi

Josai University

1 Introduction

量子情報理論では，量子状態 (density operator) ρ のもとで物理量 (self-adjoint operator) A を観測したときの期待値は $\mathrm{Tr}(\rho A)$ で表され，分散は $\mathrm{Var}_\rho(A) := \mathrm{Tr}(\rho A^2) - (\mathrm{Tr}(\rho A))^2$ で表されることが知られている．量子状態 ρ のもとで 2 つの物理量 A, B に対して Heisenberg uncertainty relation は次の不等式で与えられている．

$$\mathrm{Var}_\rho(A)\mathrm{Var}_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|\mathrm{Tr}(\rho[A, B])|^2$$

さらにより強い不等式が Schrödinger によって得られている．

$$\mathrm{Var}_\rho(A)\mathrm{Var}_\rho(B) - |\mathrm{Re}(\mathrm{Cov}_\rho(A, B))|^2 \geq \frac{1}{4}|\mathrm{Tr}(\rho[A, B])|^2,$$

ただし $[A, B] := AB - BA$ は A, B の commutator であり，covariance は $\mathrm{Cov}_\rho(A) := \mathrm{Tr}(\rho AB) - \mathrm{Tr}(\rho A)\mathrm{Tr}(\rho B)$ で与えられる．Luo [8] は不確定性を表す量として

$$U_\rho(A) = \sqrt{\mathrm{Var}_\rho(A)^2 - (\mathrm{Var}_\rho(A) - I_\rho(A))^2}.$$

を導入して，$U_\rho(A)$ についての Heisenberg 型の不等式の拡張を得た．

$$U_\rho(A)U_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|\mathrm{Tr}(\rho[A, B])|^2.$$

次のこの論文で用いられる記号等を導入する．

Definition 1.1 $M_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 複素行列全体、 $M_{n,sa}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ エルミート行列全体，$M_{n,+}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 正定値複素行列全体，$M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 密度行列全体とする． また $M_n(\mathbb{C})$ 上の *Hilbert-Schmidt inner product* は次のように定義される．

$$(A, B)_{HS} = Tr(A^*B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}b_{ij},$$

ただし $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とする．$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して *left multiplicative operator* と *right multiplicative operator* を次のように定義する．

$$L_A(X) = AX, \quad R_A(X) = XA, \quad (X \in M_n(\mathbb{C})).$$

Definition 1.2 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ は次の条件を満たすとき，作用素単調関数 *(operator monotone function)* という． $A,B\in M_{n,+}(\mathbb{C}),\quad 0\le A\le B \Longrightarrow 0\le f(A)\le f(B).$
作用素単調関数 f は $f(x)=xf(x^{-1})$ を満たすとき対称 *(symmetric)*, $f(1)=1$ を満たすとき *normarized* という． また *symmetric normarized operator monotone function* の全体を $\mathcal{F}_{op}$ とする．

Example 1.1

$$f_{RLD}(x)=\frac{2x}{x+1},\ f_{SLD}(x)=\frac{x+1}{2},\ f_{BKM}(x)=\frac{x-1}{\log x},\ f_{WY}(x)=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)^2,$$

$$f_{WYD}(x)=\alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha-1)(x^{1-\alpha}-1)},\ \alpha\in(0,1).$$

$f\in\mathcal{F}_{op}$ に対しては $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$ とおく．regular function と non-regular function はそれぞれ次のように定義される．

$$\mathcal{F}_{op}^r=\{f\in\mathcal{F}_{op}|f(0)\neq 0\},\qquad \mathcal{F}_{op}^n=\{f\in\mathcal{F}_{op}|f(0)=0\}.$$

Definition 1.3 ([3],[5]) $f\in\mathcal{F}_{op}^r$ に対して $\tilde{f}(x)=\dfrac{1}{2}\left\{(x+1)-(x-1)^2\dfrac{f(0)}{f(x)}\right\},\quad x>0$ と定義する．

Example 1.2

$$\tilde{f}_{WY}(x)=\sqrt{x},\ \ \tilde{f}_{WYD}(x)=\frac{x^\alpha+x^{1-\alpha}}{2},\ \ \tilde{f}_{SLD}(x)=\frac{2x}{x+1}.$$

Proposition 1.1 ([3],[4]) $f\to\tilde{f}$ は $\mathcal{F}_{op}^r$ と $\mathcal{F}_{op}^n$ の間の 1 対 1 対応を与える．

Kubo-Ando 理論 ([6]) より，matrix mean m_f は operator monotone function と次の関係で結びつけられる． $f\in\mathcal{F}$ に対して $m_f(A,B)=A^{1/2}f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$, ただし $A,B\in M_{n,+}(\mathbb{C})$. そこで monotone metrics を次のように定義することができる．
$\rho=\displaystyle\sum_{i=1}^n\lambda_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して $\langle X,Y\rangle_f=Tr[X^*m_f(L_\rho,R_\rho)^{-1}Y],\quad X,Y\in M_n(\mathbb{C})$,
ただし
$m_f(L_\rho,R_\rho)^{-1}=\displaystyle\sum_{i,j}m_f(\lambda_i,\lambda_j)^{-1}L_{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|}R_{|\phi_j\rangle\langle\phi_j|}$ と表されることに注意する．

2 Generalized Quasi-metric adjusted skew information

$g, f \in \mathcal{F}_{op}^r$ に対して次の条件 (A) を与える． $g(x) \geq k\dfrac{(x-1)^2}{f(x)}$, $k > 0$. このとき $\Delta_g^f(x) = g(x) - k\dfrac{(x-1)^2}{f(x)} \in \mathcal{F}_{op}$ とおく．次の条件 (B) も考える． $g(x) + \Delta_g^f(x) \geq \ell f(x)$, $\ell > 0$.

Definition 2.1 $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次を定義する．

$$\begin{aligned}\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y) &= k\langle (L_A - R_B)X, (L_A - R_B)Y\rangle_f \\ &= kTr[X^*(L_A - R_B)m_f(L_A, R_B)^{-1}(L_A - R_B)Y] \\ &= Tr[X^* m_g(L_A, R_B)Y] - Tr[X^* m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B)Y],\end{aligned}$$

$$\Psi_{A,B}^{(g,f)}(X,Y) = Tr[X^* m_g(L_A, R_B)Y] + Tr[X^* m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B)Y],$$

$$I_{A,B}^{(g,f)}(X) = \Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,X),\ J_{A,B}^{(g,f)}(X) = \Psi_{A,B}^{(g,f)}(X,X),$$

$$U_{A,B}^{(g,f)}(X) = \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X)\cdot J_{A,B}^{(g,f)}(X)},$$

3 Quantum Channels に関連する不等式

量子状態 $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ を量子通信路 Φ によって $\Phi(\rho)$ に変換される場合を扱う．一般に量子通信路は Kraus 表現で表されることが知られている．すなわち

$$\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^n K_i \rho K_i^*, \quad \sum_{i=1}^n K_i^* K_i = I.$$

である．このとき Φ に関する ρ の coherence を次で定義する． $I(\rho, \Phi) = \sum_{i=1}^n I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(K_i)$.

したがって ρ のスペクトル分解 $\rho = \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ を用いると次を得る．

$$\begin{aligned}I(\rho, \Phi) &= \sum_i \sum_{j,,k} (m_g(\lambda_j, \lambda_k) - m_{\Delta_g^f}(\lambda_j, \lambda_k))|\langle\phi_j|K_i|\phi_k\rangle|^2 \\ &= \sum_i \sum_{j\neq k} (m_g(\lambda_j, \lambda_k) - m_{\Delta_g^f}(\lambda_j, \lambda_k))|\langle\phi_j|K_i|\phi_k\rangle|^2 \\ &= 2\sum_i \sum_{j<k} (m_g(\lambda_j, \lambda_k) - m_{\Delta_g^f}(\lambda_j, \lambda_k))|\langle\phi_j|K_i|\phi_k\rangle|^2.\end{aligned}$$

明らかに次の不等式が成り立つ． $I(\rho, \Phi) \leq 2\sum_{j<k}(m_g(\lambda_j, \lambda_k) - m_{\Delta_g^f}(\lambda_j, \lambda_k))$.

$I(\rho, \Phi)$ についての和型不確定性関係が得られる．

Theorem 3.1 Φ, Ψ をそれぞれ次の *Kraus* 表現をもつ *2* つの *quantum channels* とする.

$$\Phi(\rho)=\sum_{i=1}^{n} K_i\rho K_i^*,\quad \sum_i K_i^*K_i=I,\ \Psi(\rho)=\sum_{i=1}^{n} L_i\rho L_i^*,\quad \sum_i L_i^*L_i=I.$$

このとき次が成り立つ.

$$I(\rho,\Phi)+I(\rho,\Psi)\geq \max_{\pi\in S_n}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\max\{I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(K_i+L_{\pi(i)}), I_{\rho.\rho}^{(g,f)}(K_i-L_{\pi(i)})\},$$

ただし S_n は *n-element permutation group* で $\pi\in S_n$ は任意の *n-element permutation* とする.

次のような成分をもつ $2n\times 2n$ 行列を G とおく.

$$G_{ij}=\frac{\Gamma_{\rho,\rho}^{(g,f)}(K_i,K_j)}{\sqrt{I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(K_i)}\sqrt{I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(K_j)}},\ 1\leq i,j\leq n$$

$$G_{ij}=\frac{\Gamma_{\rho,\rho}^{(g,f)}(K_i,L_{j-n})}{\sqrt{I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(K_i)}\sqrt{I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(L_{j-n})}},\ 1\leq i\leq n, n+1\leq j\leq 2\pi$$

$$G_{ij}=\frac{\Gamma_{\rho,\rho}^{(g,f)}(L_{i-n},K_j)}{\sqrt{I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(L_{i-n})}\sqrt{I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(K_j)}},\ n+1\leq i\leq 2n, 1\leq j\leq n$$

$$G_{ij}=\frac{\Gamma_{\rho,\rho}^{(g,f)}(L_{i-n},L_{j-n})}{\sqrt{I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(L_{i-n})}\sqrt{I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(L_{j-n})}}, n+1\leq i,j\leq 2n$$

このとき次の和型不確定性関係が得られる.

Theorem 3.2 *Theorem 3.1* と同じ条件を仮定する. このとき次が成り立つ.

$$I(\rho,\Phi)+I(\rho,\Psi)\geq\frac{1}{\lambda_{max}(G)}I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(\sum_i(K_i+L_i)),$$

ただし $\lambda_{max}(G)$ は *is* G の最大固有値である. .

Theorem 2.1 (1), (2) を適用すると次の定理を得る.

Theorem 3.3 *Theorem 3.1* と同じ条件を仮定する. このとき条件 *(A)* のもとで次が成り立つ.

(1) $I(\rho,\Phi)I(\rho,\Psi)=\sum_{i,j}I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(K_i)I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(L_j)\geq\sum_{i,j}|\Gamma_{\rho,\rho}^{(g,f)}(K_i,L_j)|^2.$

(2) さらに条件 (B) を仮定すると

$$U(\rho,\Phi)U(\rho,\Psi)=\sum_i U_{\rho,\rho}^{(g,f)}(K_i)\sum_j U_{\rho,\rho}^{(g,f)}(L_j)\geq k\ell\sum_{i,j}|Tr[K_i^*|L_\rho-R_\rho|L_j]|^2.$$

4 Examples

$f(x), g(x)$ として次の 2 つの例を与える．

Example A $g(x) = \frac{x+1}{2}$, $f(x) = \alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha-1)(x^{1-\alpha}-1)}$, $k = \frac{f(0)}{2} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}$. このとき

$$I(\rho, \Phi) = \sum_i \sum_{j<k} (\lambda_j^\alpha - \lambda_k^\alpha)(\lambda_j^{1-\alpha} - \lambda_k^{1-\alpha})|\langle\phi_j|K_i|\phi_k\rangle|^2.$$

特に $\alpha = \frac{1}{2}$ のときは

$$I(\rho, \Phi) = \sum_i \sum_{j<k} (\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_k})^2|\langle\phi_j|K_i|\phi_k\rangle|^2.$$

Example B $g(x) = f(x) = \frac{x+1}{2}$, $k = \frac{f(0)}{2} = \frac{1}{4}$. このとき

$$I(\rho, \Phi) = \sum_i \sum_{j<k} \frac{(\lambda_j - \lambda_k)^2}{\lambda_j + \lambda_k}|\langle\phi_j|K_i|\phi_k\rangle|^2.$$

quantum channels として次の 3 つの例を与える．

Example 4.1 (1) Phase damping channel： $\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^{2} K_i \rho K_i^*$, ただし

$$K_1 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}|1\rangle\langle 1|, \quad K_2 = \sqrt{p}|1\rangle\langle 1|, \quad 0 \le p \le 1.$$

(2) Amplitude damping channel： $\Psi(\rho) = \sum_{i=1}^{2} L_i \rho L_i^*$, ただし

$$L_1 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}|1\rangle\langle 1|, \quad L_2 = \sqrt{p}|0\rangle\langle 1|, \quad 0 \le p \le 1.$$

(3) Other channel： $\Xi(\rho) = \sum_{i=1}^{2} E_i \rho E_i^*$, ただし

$$E_1 = |0\rangle\langle 1| + \sqrt{1-p}|1\rangle\langle 0|, \quad E_2 = \sqrt{p}|1\rangle\langle 0|, \quad 0 \le p \le 1.$$

任意の 2 次元 density operator は一般には $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + r\cdot\sigma)$ で表される．ただし $\mathbb{I}$ は identity operator である．$r = (r_1, r_2, r_3)$ を $|r|^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^3 \le 1$ を満たす 3 次元ベクトルとする． また $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ をパウリ行列とする．すなわち.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

したがって ρ は次の行列で表される．

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & 1 - r_3 \end{pmatrix}.$$

ρ の固有値は $\lambda_1 = \frac{1+|r|}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-|r|}{2}$. 正規化固有ベクトルは

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2|r|(|r|-r_3)}}\begin{pmatrix} r_1 - ir_2 \\ |r| - r_3 \end{pmatrix}, \ |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2|r|(|r|+r_3)}}\begin{pmatrix} r_1 - ir_2 \\ -|r| - r_3 \end{pmatrix}.$$

Example A と Example B で与えられた quantum channels に対する ρ の coherence はそれぞれ次のようになる.

[Example A]

$$I(\rho,\Phi) = \frac{(1-\sqrt{1-p})(r_1^2+r_2^2)}{2(1+\sqrt{1-|r|^2})},$$
$$I(\rho,\Psi) = \frac{(1-\sqrt{1-p})(r_1^2+r_2^2)+pr_3^2}{2(1+\sqrt{1-|r|^2})},$$
$$I(\rho,\Xi) = \frac{|r|^2+r_3^2-\sqrt{1-p}(r_1^2-r_2^2)}{2(1+\sqrt{1-|r|^2})}.$$

[Example B]

$$I(\rho,\Phi) = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-p})(|r|^2-r_3^2),$$
$$I(\rho,\Psi) = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-p})(|r|^2+\sqrt{1-p}r_3^2),$$
$$I(\rho,\Xi) = \frac{1}{2}\{|r|^2+r_3^2-\sqrt{1-p}(r_1^2-r_2^2)\}.$$

いずれの場合にも次が成り立つ.

$$I(\rho,\Phi) \le I(\rho,\Psi) \le I(\rho,\Xi).$$

5 UR for Unitary Operators

量子状態 $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ を unitary operator U で変換される場合を扱う. U に対する ρ の coherence は次で与えられる.

$$I(\rho,U) = I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(U).$$

Theorem 5.1 *U,V を 2 つの unitary operators とする. このとき*

(1) $I(\rho,U)+I(\rho,V) \ge \frac{1}{2}I(\rho,U\pm V)$.

(2) $I(\rho,U)+I(\rho,V) \ge \frac{1}{\lambda_{max}(G)}I(\rho,U+V)$,, ただし

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Gamma_{\rho,\rho}^{(g,f)}(U,V)}{\sqrt{I(\rho,U)}\sqrt{I(\rho,V)}} \\ \frac{\Gamma_{\rho,\rho}^{(g,f)}(V,U)}{\sqrt{I(\rho,V)}\sqrt{I(\rho,U)}} & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda_{max}(G) = 1 + \left|\frac{\Gamma_{\rho,\rho}^{(g,f)}(U,V)}{\sqrt{I(\rho,U)}\sqrt{I(\rho,V)}}\right|.$$

Theorem 5.2 *V, W を 2つの unitary operators とする．このとき条件 (A) の下で次が成り立つ．*

(1) $I(\rho,V)I(\rho,W) \geq |\Gamma^{(g,f)}_{\rho,\rho}(V,W)|^2$.

(2) さらに条件 (B) を仮定すると次が成り立つ．

$$U(\rho,V)U(\rho,W) \geq k\ell|Tr[V^*|L_\rho - R_\rho|W]|^2.$$

Acknowledgement The author is partially supported by JSPS KAKENHI 19K03525.

References

[1] Ya-Jing Fan, Huai-Xin Cao, Hui-Xian Meng and Liang Chen, *An uncertainty relation in terms of generalized metric adjusted skew information and correlation measure*, Quantum Inf. Process,. DOI 10.1007/s11128-016-1419-4, (2016).

[2] S.Fu, Y.Sun and S.Luo, *Skew information based uncertainty relation for quantum channels*, Quantum Information Processing, vol.18(2019), pp.258-1-11.

[3] P.Gibilisco, D.Imparato and T.Isola, *Uncertainty principle and quantum Fisher information, II*, J.Math.Phys., vol.48(2007), 072109

[4] P.Gibilisco, F.Hansen and T.Isola, *On a correspondence between regular and non-regular operator monotone functions*, Linear Algebra and its Applications, vol.430(2009), pp.2225-2232.

[5] P.Gibilisco and T.Isora, *On a refinement of Heisenberg uncertainty relation by means of quantum Fisher information*, J.Math.Anal.Appl., vol.375(2011), pp.270-275.

[6] F.Kubo and T.Ando, *Means of positive linear operators*, Math.Ann., vol.246(1980), pp.205-224.

[7] E. H. Lieb, *Convex trace functions and the Wigner–Yanase–Dyson conjecture*, Adv. Math. **11** (1973), 267–288.

[8] S. Luo, *Heisenberg uncertainty relation for mixed states*, Phys. Rev. A **72** (2005), 042110, pp.3.

[9] K.Yanagi, *Generalized trace inequalities related to fidelity and trace distance*, Linear and Nonlinear Analysis, vol.2(2016), pp.263-270.

[10] K.Yanagi, *Some generalizations of non-hermitian uncertainty relation described by the generalized quasi-metric adjusted skew information*, Linear and Nonlinear Analysis, vol.3(2017), pp.343-348.

実解析学シンポジウム2019

「実解析学シンポジウム 2019」を下記の通り開催いたします.

期日：2019 年 10 月 25 日（金）〜 10 月 27 日（日）

会場：九州工業大学 戸畑キャンパス 百周年中村記念館 2 階 多目的ホール
　　　北九州市戸畑区仙水町 1 番 1 号
　　　九州工業大学へのアクセス，キャンパスマップ
　　　http://www.kyutech.ac.jp/information/map/tobata.html

開催責任者：青山 耕治 (千葉大学), 松岡 勝男 (日本大学),
　　　　　　菅野 聡子 (神戸市立工業高等専門学校)

会場責任者：本田あおい (九州工業大学)

プログラム

1 日目：10 月 25 日（金）

◇ 14:30 〜 15:30

[2] 川﨑 敏治（日本大学／玉川大学）
原始関数による不定積分の拡張

[3] 至田 直人（大阪大学）
弱い正則条件の下での双線形フーリエ乗子作用素の有界性について

◇ 15:50 〜 16:50

[4] 野ヶ山 徹*・澤野 嘉宏 (首都大学東京・首都大学東京)
Local Muckenhoupt class for variable exponents

[5] 石 明磊*・新井 龍太郎・中井 英一 (茨城大学・茨城大学・茨城大学)
Commutators on Orlicz-Morrey spaces

このシンポジウムは下記の援助によって開催されます.
科学研究費補助金基盤研究 (B) 15H03621 代表者 中井 英一
科学研究費補助金基盤研究 (B) 16H03943 代表者 宮地 晶彦
科学研究費補助金基盤研究 (C) 19K03543 代表者 貞末 岳
科学研究費補助金基盤研究 (C) 19K03546 代表者 澤野 嘉宏
科学研究費補助金基盤研究 (C) 19K03571 代表者 古谷 康雄

2 日目：10 月 26 日（土）

◇ **9:30 ～ 11:00**

[6] 波多野修也 (中央大学)
Morrey 空間上における双線形分数積分作用素の有界性

[7] 飯田 毅士 (福島工業高等専門学校)
Orlicz-fractional maximal operators in Morrey and Orlicz-Morrey spaces

[8] 齋藤 洋樹 (日本大学)
Dual of Choquet spaces with weighted Hausdorff content

◇ **11:20 ～ 12:20**

[9] 本田 あおい*・大北 剛 (九州工業大学・九州工業大学)
メビウス型包除積分ニューラルネットワークによるデータ解析

[10] 福田 亮治*・本田 あおい・岡崎 悦明（大分大学・九州工業大学・ファジィシステム研究所）
Pan 積分の拡張と単調収束定理

◇ **14:00 ～ 15:30**

[11] 田中亮太朗*・小室直人・斎藤吉助 (東京理科大学・北海道教育大学・新潟大学)
フォン・ノイマン環の前双対における Birkhoff 直交性の左対称点について

[12] 三谷 健一 (岡山県立大学)
Day-James 空間における幾何学的定数について

[13] 厚芝 幸子 (山梨大学)
Fixed points, absolute fixed points and convergence theorems for nonlinear mappings

◇ **15:50 ～ 17:20**

[14] 岡田正已 (首都大学東京)
フーリエーベッセル変換について

[15] 内山 充 (島根大学／立命館大学)
Matrix functions and matrix order

[16] 米田 薫 (大阪府立大学名誉教授)
Walsh Fourier Analysis と測度

◇ **18:00 ～**

懇親会：カフェド・ルージュブラン (百周年中村記念館 1 階)

3 日目：10 月 27 日（日）

◇ 9:30 ～ 11:00

[17] 猪奥倫左 (東北大学)
Attainability of the best Sobolev constant in a ball

[18] 猪奥倫左 (東北大学)
Canceling effects in higher-order Hardy-Sobolev inequalities

[19] 澤野 嘉宏（首都大学東京／理化学研究所）
Composition operators on reproducing kernel Hilbert spaces with analytic positive denite functions

◇ 11:20 ～ 12:20

[20] 澤野 嘉宏（首都大学東京／理化学研究所）
Morrey 空間の種々の閉部分空間について

[21] 柳 研二郎 (城西大学)
Uncertainty relations for quantum channels

氏名の右肩の*印は連名の場合の講演者を表します.

シンポジウム Web ページ `http://bm.skr.jp/r19/`

参加者名簿

青山耕治　(千葉大)
厚芝幸子　(山梨大)
飯田毅士　(福島高専)
猪奥倫左　(東北大)
池田正弘　(理化学研究所)
石川勲　(理化学研究所)
内山充　(島根大/立命館大)
岡崎悦明　(ファジィシステム研究所)
岡田達也　(福島県立医科大)
岡田正巳　(首都大学東京)
影山正幸　(名古屋市立大)
川﨑敏治　(日本大/玉川大)
木村泰紀　(東邦大)
齋藤洋樹　(日本大)
貞末岳　(大阪教育大)
佐藤坦　(九州大・名)
佐藤友紀　(株式会社トヨタシステムズ)
澤野嘉宏　(首都大学東京/理化学研究所)
至田直人　(大阪大)
下村哲　(広島大)
菅野聡子　(神戸市立高専)
鈴木智成　(九州工業大)
石明磊　(茨城大)
田中直樹　(静岡大)
田中亮太朗　(東京理科大)
冨田直人　(大阪大)
中井英一　(茨城大)
野ヶ山徹　(首都大学東京)
波多野修也　(中央大)
平田賢太郎　(広島大)
福田亮治　(大分大)
藤田真依　(稚内北星学園大)
堀内利郎　(茨城大)
本田あおい　(九州工業大)
松岡勝男　(日本大)
松本敏隆　(静岡大)
水田義弘　(広島大・名)
三谷健一　(岡山県立大)
宮地晶彦　(東京女子大)
森藤紳哉　(奈良女子大)
柳研二郎　(城西大)
米田薫　(大阪府立大・名)

以上 42 名

バックナンバー

Vol. 1	第1回フーリエ解析セミナー (1969年)	東北大学理学部
Vol. 2	第2回フーリエ解析セミナー (1970年)	銚子(千葉大学理学部)
Vol. 3	第3回フーリエ解析セミナー (1971年)	鬼首(東北大学理学部)
Vol. 4	第4回フーリエ解析セミナー (1972年)	上山田(信州大学工学部)
Vol. 5	フーリエ解析セミナー1973	作並(東北大学理学部)
Vol. 6	フーリエ解析セミナー1974	岩手大学教養部
Vol. 7	フーリエ解析セミナー1975	金沢大学理学部
Vol. 8	実解析セミナー1976	八王子セミナーハウス(東京都立大学)
Vol. 9	実解析セミナー1977	八王子セミナーハウス(東京都立大学)
Vol. 10	実解析セミナー1978	京都府立ゼミナールハウス(大阪府立大学)
Vol. 11	実解析セミナー1979	東北大学理学部
Vol. 12	実解析セミナー1980	国際基督教大学
Vol. 13	実解析セミナー1981	金沢大学理学部
Vol. 14	実解析セミナー1982	茨城大学理学部
Vol. 15	実解析セミナー1983	慶応大学理工学部
Vol. 16	実解析セミナー1984	岡山大学教育学部
Vol. 17	実解析セミナー1985	山形大学工学部
Vol. 18	実解析セミナー1986	弘前大学教養部
Vol. 19	実解析セミナー1987	信州大学工学部
Vol. 20	実解析セミナー1988	山形大学理学部
Vol. 21	実解析セミナー1989	一橋大学
Vol. 22	Harmonic Analysis, Sendai 90	東北大学理学部
Vol. 23	実解析セミナー1991	秋田大学教育学部
Vol. 24	実解析セミナー1992	奈良女子大学理学部
Vol. 25	実解析セミナー1993	早稲田大学国際会議場(教育学部)
Vol. 26	実解析セミナー1994	岡山県立大学
Vol. 27	実解析セミナー1995	福島大学経済学部
Vol. 28	実解析学シンポジウム1996	大分大学教育学部
Vol. 29	実解析学シンポジウム1997	東北大学理学部 川合数理科学記念館
Vol. 30	実解析学シンポジウム1998	香川大学教育学部
Vol. 31	実解析学シンポジウム1999	北海道大学学術交流会館
Vol. 32	実解析学シンポジウム2000	九州大学国際ホール
Vol. 33	実解析学シンポジウム2001	東海大学湘南校舎 15号館(理学部)
Vol. 34	実解析学シンポジウム2002	鹿児島大学 稲盛会館(教育学部)
Vol. 35	実解析学シンポジウム2003	米沢市 伝国の杜 置賜文化ホール(山形大学工学部)
Vol. 36	実解析学シンポジウム2004	大分府立大学 学術交流会館
Vol. 37	実解析学シンポジウム2005	首都大学東京 国際交流会館
Vol. 38	実解析学シンポジウム2006	弘前大学理工学部
Vol. 39	実解析学シンポジウム2007	大阪教育大学天王寺キャンパス
Vol. 40	実解析学シンポジウム2008	山口大学吉田キャンパス
Vol. 41	実解析学シンポジウム2009	城西大学坂戸キャンパス
Vol. 42	実解析学シンポジウム2010	九州工業大学工学部
Vol. 43	実解析学シンポジウム2011	信州大学工学部
Vol. 44	実解析学シンポジウム2012	茨城大学理学部
Vol. 45	実解析学シンポジウム2013	岡山大学教育学部
Vol. 46	実解析学シンポジウム2014	富山大学五福キャンパス
Vol. 47	実解析学シンポジウム2015	東邦大学習志野キャンパス
Vol. 48	実解析学シンポジウム2016	奈良女子大学理学部
Vol. 49	実解析学シンポジウム2017	名古屋大学東山キャンパス
Vol. 50	実解析学シンポジウム2018	大阪教育大学天王寺キャンパス