Attainability of the best Sobolev constant in a ball

猪奥 倫左　(東北大学大学院理学研究科)*

Sobolevの不等式

$$S_{n.p}\|u\|_{L^{p^*}} \leq \|\nabla u\|_{L^p}, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1}$$

の最良定数は以下で与えられることが知られている ([1, 3]).

$$S_{n,p} = \sqrt{\pi} n^{\frac{1}{p}} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(n+1-\frac{n}{p}\right)}{\Gamma(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{n}}, \quad 1 < p < n.$$

ここで$n \geq 2$, $1 < p < n$, $p^* = \frac{np}{n-p}$であり，$\Gamma(\cdot)$はガンマ関数である．この最良定数は領域Ωによらないことが知られているが，最良定数が$W_0^{1,p}(\Omega)$で達成されるかどうかは領域に依存して結論が異なる．実際，$\Omega = \mathbb{R}^n$であれば不等式はスケール変換

$$u_\mu(x) = \mu^{\frac{n-p}{p}} u(\mu x), \qquad \mu > 0 \tag{2}$$

に関して不変であり，最良定数$S_{n,p}$はAubin-Talenti関数

$$U(x) = (a + b|x|^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}}, \quad a, b > 0 \tag{3}$$

で達成される．一方で，Ωが有界領域の場合には不等式のスケール不変性が破綻することに起因して，最良定数$S_{n,p}$は$W_0^{1,p}(\Omega)$で達成されない．

ここでは，Ωが原点中心の球B_Rの場合に，伸縮とは異なるスケール変換を導入し，その下で不変なSobolev型不等式を構築する．

定理 1 (Sobolev 型不等式) $R > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $1 < p < n$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ とし，$u \in W_0^{1,p}(B_R)$は球対称とする．このとき不等式

$$S_{n,p}\left(\int_{B_R} \frac{|u(x)|^{p^*}}{\left[1-\left(\frac{|x|}{R}\right)^{\frac{n-p}{p-1}}\right]^{\frac{p(n-1)}{n-p}}} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \|\nabla u\|_{L^p(B_R)} \tag{4}$$

が成り立つ．左辺の定数は最良であり，Aubin-Talenti型関数

$$U_R(x) = \left[a + b\left\{\frac{1}{|x|^{\frac{n-p}{p-1}}} - \frac{1}{R^{\frac{n-p}{p-1}}}\right\}^{-\frac{p}{n-p}}\right]^{1-\frac{n}{p}}, \quad a, b > 0$$

で達成される．さらに不等式 (4) は，以下の変換

$$\begin{cases} u_\lambda(x) := \lambda^{\frac{n-p}{p}} u(x_\lambda), \\ x_\lambda := \left[\lambda^{-\frac{n-p}{p-1}}|x|^{-\frac{n-p}{p-1}} + (1-\lambda^{-\frac{n-p}{p-1}})R^{-\frac{n-p}{p-1}}\right]^{-\frac{p-1}{n-p}} \dfrac{x}{|x|} \end{cases} \tag{5}$$

に関して不変である．

* 〒980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉6-3　東北大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: ioku@tohoku.ac.jp

定理1から次の注意1〜3が得られる．

注意 1 定理1から，有界領域Ω上のSobolev不等式(1)の最良定数は達成されないことが，系として導かれる．関数$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$のSchwarz球対称化関数を$u^\sharp \in W_0^{1,p}(B_R)$とする．ここで$B_R$は$\Omega$と同体積の球である．このとき，定理1とPólya-Szegöの不等式，Schwarz球対称化の一般論から

$$S_{n,p}\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} = S_{n,p}\|u^\sharp\|_{L^{p^*}(B_R)} < S_{n,p}\left(\int_{B_R} \frac{|u^\sharp(x)|^{p^*}}{\left[1-\left(\frac{|x|}{R}\right)^{\frac{n-p}{p-1}}\right]^{\frac{p(n-1)}{n-p}}}dx\right)^{\frac{1}{p^*}}$$
$$\le \|\nabla u^\sharp\|_{L^p(B_R)} \le \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

が全ての $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ に対して成立する．狭義の不等式は最良定数が達成されないことも示している．

注意 2 定義域の半径を$R \to \infty$とすれば，不等式(4)は全空間における通常のSobolevの不等式と一致し，U_RはAubin-Talenti関数(3)に収束する．さらに，伸縮とは異なるスケール変換(5)は，$R \to \infty$とすると通常の伸縮(2)と一致する．実際，

$$\lambda^{\frac{n-p}{p}}u(x_\lambda) \to \lambda^{\frac{n-p}{p}}u(\lambda x), \quad R \to \infty$$

が成り立つ．

注意 3 通常のSobolevの不等式(1)は$p \to n$とすると，$S_{n,p} \to 0$となる上，$W_0^{1,n}(\Omega) \not\subset L^\infty(\Omega)$であることから$p = n$では意味をなさないが，不等式(4)は臨界Sobolev不等式の一種として知られるAlvinoの不等式を導く．実際，直接計算から

$$\lim_{p\uparrow n} S_{n,p}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{\sqrt{\pi}n^{\frac{1}{n}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}, \qquad \lim_{p\uparrow n}\frac{n-p}{p-1}\left(1-\left(\frac{|x|}{R}\right)^{\frac{n-p}{p-1}}\right) = \log\frac{R}{|x|}$$

である．これからAlvinoの不等式

$$\frac{\sqrt{\pi}n^{\frac{1}{n}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}\sup_{x\in B_R}\frac{|u^\sharp(x)|}{\left(\log\frac{R}{|x|}\right)^{\frac{n-1}{n}}} \le \|\nabla u\|_{L^n(B_R)}$$

が，不等式(4)に極限操作$p \uparrow n$を施すことで得られる．

球対称でない一般の$W_0^{1,p}(B_R)$関数については不等式(4)は成立しない．しかし，右辺の∇uをスケール不変な微分作用素に修正することで同様のSobolev型不等式が成り立つ．さらに，より一般のCaffarelli-Kohn-Nirenberg不等式への拡張も得られている．詳細は[2]参照．

参考文献

[1] Aubin, T., *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differ. Geom. **11** (1976), 573–598.

[2] Ioku, N., *Attainability of the best Sobolev constant in a ball,* Math. Annalen, to appear.

[3] Talenti, G., *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. **110** (1976), 353–372.

Canceling effects in higher-order Hardy-Sobolev inequalities

猪奥 倫左　(東北大学大学院理学研究科)*

本研究はFirenze大学のAndrea Cianchi氏との共同研究に基づく．

Hardy-Sobolev 型の不等式は，境界からの距離関数 $d(x)$ を重みとして持つ関数不等式であり，次の形で述べられる：Ω は有界で滑らかな境界を持つとし，$\alpha \neq p-1$ とする．このとき，ある $C>0$ が存在して

$$\left\|\frac{u}{d}\right\|_{L^p(\Omega,d^\alpha)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega,d^\alpha)} \tag{1}$$

が任意の $u \in W_0^{1,p}(\Omega, d^\alpha)$ に対して成り立つ．ここでノルムは

$$\|u\|_{L^p(\Omega,d^\alpha)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p d(x)^\alpha dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega,d^\alpha)} := \|u\|_{L^p(\Omega,d^\alpha)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega,d^\alpha)}$$

であり，$W_0^{1,p}(\Omega, d^\alpha)$ は $C_0^\infty(\Omega)$ の $W^{1,p}(\Omega, d^\alpha)$ ノルムでの完備化である．

一方，不等式(1) は $\alpha = p-1$ の場合には成り立たない．本発表では，不等式(1) の高階微分版においては，特別な特異性の打ち消しあいを加味すれば $\alpha = p-1$ においても評価が成り立つことを紹介する．

命題 1 ([3]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界を持つ有界領域とし，$1 \leq p < \infty$ とする．このとき，ある $C>0$ が存在して，任意の $u \in W_0^{2,p}(\Omega, d^{p-1})$ に対して以下が成り立つ．

$$\left\|\nabla\left(\frac{u}{d}\right)\right\|_{L^p(\Omega,d^{p-1})} \leq C\|u\|_{W^{2,p}(\Omega,d^{p-1})}.$$

注意 1 左辺の $\nabla\left(\frac{u}{d}\right)$ を展開して現れる項に対する二つの不等式

$$\left\|\frac{\nabla u}{d}\right\|_{L^p(\Omega,d^{p-1})} \leq C\|u\|_{W^{2,p}(\Omega,d^{p-1})},$$
$$\left\|\frac{u}{d^2}\right\|_{L^p(\Omega,d^{p-1})} \leq C\|u\|_{W^{2,p}(\Omega,d^{p-1})}$$

は両方とも成り立たない．この意味で，命題の左辺にある $\nabla\left(\frac{u}{d}\right)$ は特別な特異性の相殺を持っていることがわかる．

発表では，この「相殺効果」を具体例を通して説明するとともに，微分階数と重みをより一般化した形での定理を紹介する．

* 〒980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉6-3　東北大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: ioku@tohoku.ac.jp

参考文献

[1] H. Castro & H. Wang, A Hardy type inequality for $W^{m,1}(0,1)$ functions, *Calc. Var.* **3-4** (2010), 525–531.

[2] H. Castro, J. Dávila & H. Wang, A Hardy type inequality for $W_0^{m,1}(\Omega)$ functions, *J. Eur. Math. Soc.* **15** (2013), 145–155.

[3] A. Cianchi & N. Ioku, Canceling effects in higher-order Hardy-Sobolev inequalities, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **56** (2017), 56:31.

[4] A. Kufner, *Weighted Sobolev spaces*, Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig, 1980.

[5] T. Horiuchi, The imbedding theorems for weighted Sobolev spaces, *J. Math. Kyoto Univ.* **29** (1989), 365–403.

[6] T. Horiuchi, The imbedding theorems for weighted Sobolev spaces. II, *Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. Ser. A* **23** (1991), 11–37.

[7] B. Opic & A. Kufner, *Hardy-type inequalities*, Longman Scientific & Technical, New York, 1990.

COMPOSITION OPERATORS ON REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACES WITH ANALYTIC POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS

YOSHIHIRO SAWANO

1. Introduction

In this talk, we consider reproducing kernel Hilbert spaces. Let u be an integrable function satisfying $0 \le \hat{u}(x) \le C_a \exp(-a|x|)$ for any $a > 0$ and $x \in \mathbb{R}^d$. Here $\hat{u}$ denotes the Fourier transform. That is, $\hat{u}$ is non-negative and decays faster than any exponential functions. By the Bochner theorem, we know that $(x, y) \in \mathbb{R}^d \mapsto k(x, y) \equiv u(x - y)$ is positive definite. Due to the strong decay u admits analytic extension so that $(z, w) \in \mathbb{C}^d \mapsto \tilde{k}(z, w) \equiv u(z - \bar{w})$ is positive definite. An important consequence of this fact is that k and $\tilde{k}$ generate reproducing kernel Hilbert spaces on $\mathbb{R}^d$ and $\mathbb{C}^d$, respectively.

We aim to prove the following theorem:

Theorem 1.1. *Suppose that $f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ is a holomorphic such that $C_f : h \mapsto h \circ f$ maps $H\ k(\mathbb{C}^d)$ to $H\ k(\mathbb{C}^d)$ boundedly. Assume that C_f is bounded, $\mathcal{G}(u)$ spans $\mathbb{R}^d$ and that u is subject to the following control*:

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \left(\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\sup_P \frac{\| \exp(iz \cdot x) P\|_{L^2(\hat{u})}}{\|P\|_{L^2(\hat{u})}}} \right) < \infty.$$

Here P ranges over all non-zero polynomials of degree n. Then f is affine.

If time permits, we discuss the $\mathbb{R}^d$-version of this theorem. This work is jontly done with Masahiro Ikeda and Isao Ishikawa at Riken.

Department of Mathematics and Information Sciences, Tokyo Metropolitan University, 1-1 Minami-Ohsawa, Hachioji, 192-0397, Japan

Email address: yoshihiro-sawano@celery.ocn.ne.jp

Yoshihiro Sawano is partially supported by Riken, Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (19K03546), the Japan Society for the Promotion of Science and Peoplefs Friendship University of Russia.

CLOSED SUBSPACES IN MORREY SPACES, MORREY 空間の閉部分空間について

BY YOSHIHIRO SAWANO

1. Introduction

We consider some applications of interpolation functors acting on Morrey spaces. Let $0 < q \le p \le \infty$. For an $L^q_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$-function f, its Morrey norm is defined by

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} = \|f\|^{\mathcal{B}}_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q {\rm d}y\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.1}$$

The Morrey space $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ is the set of all $f \in L^q_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ for which the norm $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q}$ is finite.

Let $L^0(\mathbb{R}^n)$ denote the set of all Lebesgue measurable functions. For a linear subspace U of $L^0(\mathbb{R}^n)$ with lattice property, define $U\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \equiv \overline{U(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)}^{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)}$. Here are examples.

1. The case where $U = L^\infty(\mathbb{R}^n)$: The *bar space* $\overline{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ stands for the closure of $L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ with respect to $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
2. The case where $U = L^0_{\rm c}(\mathbb{R}^n) \equiv \{f \in L^0(\mathbb{R}^n) : {\rm supp}(f) \text{ is compact }\}$: The *star space* $\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ stands for the closure in $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ of $L^0_{\rm c}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
3. The case where $U = L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap L^0_{\rm c}(\mathbb{R}^n)$: Denote by $\widetilde{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$, the *tilde subspace*, the $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$-closure of $L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n) = L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$.
4. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a measurable set. Define $L^0(\Omega)$ to be the subset of $L^0(\mathbb{R}^n)$ which consists of all measurable functions which vanish almost everywhere outside Ω. Let $U = L^0(\Omega)$. Then we obtain the closed subspace $\mathcal{M}^p_q(\Omega)$ of all $f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ for which f vanishes almost everywhere outside Ω.

In a different context another series of closed spaces can be considered.

Notice that the Morrey space $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ with $0 < q \le p < \infty$ can be defined as the set of all $f \in L^q_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ for which $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup\limits_{r>0} m(f,p,q;r) < \infty$, where

$$m(f,p,q;r) \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q {\rm d}y\right)^{\frac{1}{q}} \quad (r>0).$$

1. The *vanishing Morrey space* $V_0\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ *at* 0 is defined by
$$V_0\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \equiv \{f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) : \lim_{r\downarrow 0} m(f,p,q;r) = 0\}.$$
2. The *vanishing Morrey space* $V_\infty\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ *at infinity* is defined by
$$V_\infty\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) : \lim_{r\to\infty} m(f,p,q;r) = 0\right\},$$

Yoshihiro Sawano is partially supported by Riken, Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (19K03546), the Japan Society for the Promotion of Science and Peoplefs Friendship University of Russia.

(3) The space $V^{(*)}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ is defined as the set of all functions $f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ such that
$$\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{B(x,1)}|f(y)|^q\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B(N)}(y)\mathrm{d}y\right)=0.$$
(4) The space $V^{(*)}_{0,\infty}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ is defined as the intersection of these three spaces.

Our aim of this talk is to consider the relations between these various subspaces. This is a joint work with Denny Ivanal Hakim.

Department of Mathematics and Information Sciences, Tokyo Metropolitan University, 1-1 Minami-Ohsawa, Hachioji, 192-0397, Japan

E-mail address: yoshihiro-sawano@celery.ocn.ne.jp

Uncertainty Relations For Quantum Channels

Kenjiro Yanagi*

Josai University

1　はじめに

量子力学で有名な不確定性関係は，Heisenberg や Schrödinger によって発見された．　現在までそれらの拡張や一般化が様々な形で得られてきた．中でも Generalized quasi-metric adjusted skew information に関するものが最も一般的な不等式として与えられている．この講演では Quantum channel を表す Kraus 表現を用いた新しい不確定性を表す量を用いてその性質を調べる．

Definition 1 $M_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 複素行列全体，$M_{n,sa}(\mathbb{C})$ をエルミート行列全体，$M_{n,+}(\mathbb{C})$ を正定値複素行列全体，$M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ を密度行列全体とする．　$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して *left multiplicative operator* と *right multiplicative operator* を次のように定義する．

$$L_A(X) = AX, \quad R_A(X) = XA, \quad (X \in M_n(\mathbb{C})).$$

Definition 2 作用素単調関数 *(operator monotone function)* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ は $f(x) = xf(x^{-1})$ を満たすとき対称 *(symmetric)*, $f(1) = 1$ を満たすとき *normarized* という．　また *symmetric normarized operator monotone function* の全体を $\mathcal{F}_{op}$ とする．

$f \in \mathcal{F}_{op}$ に対して $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$ とおく．　このとき regular function と non-regular function はそれぞれ次のように定義される．

$$\mathcal{F}_{op}^r = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) \neq 0\}, \quad \mathcal{F}_{op}^n = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) = 0\}.$$

Kubo-Ando 理論より，matrix mean m_f は operator monotone function と次の関係で結びつけられる．$f \in \mathcal{F}_{op}$ に対して

$$m_f(A, B) = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}, \quad A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$$

そこで monotone metrics を次のように定義することがえきる．$\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して

$$\langle X, Y \rangle_f = Tr[X^* m_f(L_\rho, R_\rho)^{-1} Y], \quad X, Y \in M_n(\mathbb{C})$$

ただし　$m_f(L_\rho, R_\rho)^{-1} = \displaystyle\sum_{i,j} m_f(\lambda_i, \lambda_j)^{-1} L_{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|} R_{|\phi_j\rangle\langle\phi_j|}$ と表されることに注意する．

*E-mail:yanagi@josai.ac.jp, The author was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 19K03525.

2　Quantum Channels に関連する不等式

Definition 3 $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次を定義する．

$$\begin{aligned}\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y) &= k\langle (L_A - R_B)X, (L_A - R_B)Y\rangle_f \\ &= kTr[X^*(L_A - R_B)m_f(L_A, R_B)^{-1}(L_A - R_B)Y] \\ &= Tr[X^* m_g(L_A, R_B)Y] - Tr[X^* m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B)Y],\end{aligned}$$

$$I_{A,B}^{(g,f)}(X) = \Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,X),$$

ただし $A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad B = \sum_{j=1}^{N} \mu_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ に対して

$$m_f(L_A, R_B)^{-1} = \sum_{i,j} m_f(\lambda_i, \mu_j)^{-1} L_{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|} R_{|\psi_j\rangle\langle\psi_j|}.$$

Definition 4 *Kraus*表現 $(\sum_{i=1}^{n} K_i^* K_i = I)$ によって形式化される *quantum channel* $\Phi(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^*$ によって送信される量子状態 $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ の不確定量を次で定義する．

$$I(\rho, \Phi) = \sum_{i=1}^{n} I_{\rho,\rho}^{(g,f)}(K_i).$$

この講演では，$I(\rho, \Phi)$ に関するいくつかの不確定性関係を提起することを目的とする．