Morrey 空間上における双線形分数積分作用素の有界性

波多野修也　中央大学理工学研究科数学専攻
澤野嘉宏　首都大学東京理学研究科数理科学専攻

はじめに

1992 年に Grafakos 氏により, 双線形分数積分作用素が導入された. 本講演では, この作用素の Morrey 空間上の有界性について得られた結果を紹介する.

1　導入

Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は, 指数を $0 < q \le p < \infty$ とし, ノルム

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup_{Q \in \mathcal{D}} |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q |f(x)|^q \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}$$

が有限となるような $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数 f 全体として定義される. ただし, $\mathcal{D}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の二進立方体全体とする. Morrey 空間上で分数積分作用素の有界性が知られている. 分数積分作用素 I_α は, パラメーター $0 < \alpha < n$ を持ち, 可積分関数 f に対して,

$$I_\alpha f(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

と定義されている. また, パラメーターや指数 $0 < \alpha < n$, $1 < q \le p < \infty$, $1 < t \le s < \infty$ が

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, \quad \frac{q}{p} = \frac{t}{s}$$

を満たすとき, I_α は Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ から Morrey 空間 $\mathcal{M}^s_t(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素である.

2　主結果

本研究では, この結果を双線形の場合に拡張し, Morrey 空間上において双線形分数積分作用素の有界性を調べた. 双線形分数積分作用素は Grafakos 氏 [1] により 1992 年に導入された.

定義. $0 < \alpha < n$ とする. このとき可積分関数 f_1, f_2 に対して,

$$\mathcal{I}_\alpha[f_1, f_2](x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_1(x+y)f_2(x-y)}{|y|^{n-\alpha}} \mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

と定義する.

この作用素の有界性は Lebesgue 空間上では, Grafakos 氏 [1], Kenig 氏, Stein 氏 [6] によって証明が与えられた. 本研究では, この結果の Morrey 空間上への一般化を考えた.

主定理 ([3])**.** $0 < \alpha < n$, $1 < q_1 \le p_1 < \infty$, $1 < q_2 \le p_2 < \infty$, $0 < q \le p < \infty$, $1 \le t \le s < \infty$ に対して,

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2},$$
$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, \quad \frac{q}{p} = \frac{t}{s}, \quad s < \min(q_1, q_2)$$

と仮定する. このとき任意の $f_1 \in \mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)$, $f_2 \in \mathcal{M}^{p_2}_{q_2}(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$\|\mathcal{J}_\alpha[f_1, f_2]\|_{\mathcal{M}^s_t} \lesssim \|f_1\|_{\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}} \|f_2\|_{\mathcal{M}^{p_2}_{q_2}}$$

が成り立つ.

証明は以下のような Morrey 空間のアトム分解 [5] を応用して得られた.

補題. パラメーター p, q, s, t を

$$1 < q \le p < \infty, \quad 1 < t \le s < \infty, \quad q < t, \quad p < s$$

または

$$1 = q \le p < \infty, \quad 1 = t \le s < \infty, \quad p < s.$$

満たすようにとる. さらに $\{Q_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}^s_t(\mathbb{R}^n)$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \subset [0, \infty)$ を

$$\mathrm{supp}(a_j) \subset Q_j, \quad \left\| \sum_{j=1}^\infty \lambda_j \chi_{Q_j} \right\|_{\mathcal{M}^p_q} < \infty. \tag{2.1}$$

が成り立つと仮定する. このとき, 級数 $f = \displaystyle\sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j$ は $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 上で収束し,

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \lesssim_{p,q,s,t} \left\| \sum_{j=1}^\infty \lambda_j \frac{\|a_j\|_{\mathcal{M}^s_t}}{|Q_j|^{\frac{1}{s}}} \chi_{Q_j} \right\|_{\mathcal{M}^p_q}. \tag{2.2}$$

が成り立つ.

その他の指数条件における研究として文献 [2, 4] を挙げておく.

参考文献

[1] L. Grafakos, On multilinear fractional integrals, Studia Math. **102** (1992), 49–56.

[2] N. Hatano, Bilinear estimates on Morrey spaces by using average, available at http://arxiv.org/abs/1905.10082v1.

[3] N. Hatano, and Y. Sawano, A note on the bilinear fractional integral operator acting on Morrey spaces, available at http://arxiv.org/abs/1904.00574.

[4] Q. He, and D. Yan, Bilinear fractional integral operators on Morrey spaces, available at http://arxiv.org/abs/1805.01846v2.

[5] T. Iida, Y. Sawano and H. Tanaka, Atomic decomposition for Morrey spaces, Z. Anal. Anwend. **33** (2014), no. 2, 149–170.

[6] C.E. Kenig and E.M. Stein, Multilinear estimates and fractional integration, Math. Res. Lett. **6** (1999), 1–15.

Orlicz-fractional maximal operators in Morrey and Orlicz-Morrey spaces

飯田　毅士　(福島工業高等専門学校 一般教科)*

1. Introduction

通常の fractional integral operator I_α を定義する.

Definition 1. $0 < \alpha < n$ に対して

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

次に Young function B を導入する.

Definition 2. 関数 $B : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が Young function であるとは, 連続関数, 凸関数, 単調増加関数, $B(0) = 0$, さらに $\lim_{t\to\infty} B(t) = \infty$ を満たすとする. さらに complementary Young function $\bar{B}$ を定義する:

$$\bar{B}(t) := \sup_{s>0}(st - B(s)) \ (t > 0).$$

Luxemberg norm による n 次元立方体 Q 上の関数 f の平均を定義する.

Definition 3. n 次元立方体 Q に対して,

$$\|f\|_{B,Q} := \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_Q B\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx \le 1\right\}. \tag{1}$$

Orlicz fractional maximal operator $M_{B,\alpha}$ を次のように定義する:

Definition 4. $0 \le \alpha < n$ に対して,

$$M_{B,\alpha}f(x) := \sup_{Q\ni x} \ell(Q)^\alpha \|f\|_{B,Q},$$

ここで, $\ell(Q)$ は Q の一辺の長さを表す. $\alpha = 0$ のとき, $M_B := M_{B,0}$ と記述する. $B(t) = t$ のとき, $M_\alpha := M_{B,\alpha}$, $M := M_B$ と定める.

Definition 5. Young function B に対して, $B(t) \lesssim t^{p_0}$ $(t \ge 1)$ を仮定する. このとき, Orlicz-Morrey 空間を次のように定める.

$$\mathcal{M}^{p_0}_B := \left\{f : \|f\|_{\mathcal{M}^{p_0}_B} := \sup_{Q:\text{cube}} |Q|^{\frac{1}{p_0}} \|f\|_{B,Q} < \infty\right\}.$$

$B(t) = t^p$ のとき, $\mathcal{M}^{p_0}_p := \mathcal{M}^{p_0}_B$ と定める.

Pérez [7] は M_B の有界性に関する Young function B に対する次の特徴づけを示した.

本研究は科学研究費補助金 若手研究 (課題番号:18K13434) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 26A33, 42B25, 42B35
キーワード：Orlicz-fractional maximal operator, Morrey spaces
* 〒970-8034 福島県いわき市平上荒川字長尾 30 福島工業高等専門学校 一般教科
e-mail: tiida@fukushima-nct.ac.jp

Proposition 1 (Pérez)**.** $1 < p < \infty$ とする. このとき, 次の条件は同値である.

(i) $B \in B_p$: ある正定数 $c > 0$ に対して $\displaystyle\int_c^\infty \frac{B(t)}{t^{p+1}} dt < \infty$ が成り立つ.

(ii) $M_B : L^p \to L^p$

一方で, Cruz-Uribe, Moen [3, p.428] は $M_{B,\alpha} : L^p \to L^q$ が成り立つための十分条件を導き, それが必要条件でもあることが [6] によって示された.

Proposition 2. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ とする. このとき, *Young function* B に関する次の条件は同値である.

(i) $B^{\frac{q}{p}} \in B_q$: ある正定数 $c > 0$ に対して $\displaystyle\int_c^\infty \frac{B(t)^{\frac{q}{p}}}{t^{q+1}} dt < \infty$ が成り立つ.

(ii) $\left(\int_{\mathbb{R}^n} M_{B,\alpha} f(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

次の結果は Adams の不等式 [1] として知られている.

Proposition 3. $0 \le \alpha < n$, $1 < p \le p_0 < \frac{n}{\alpha}$, $1 < q \le q_0 < \infty$, $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$, $\frac{q}{q_0} = \frac{p}{p_0}$ とすると, $M_\alpha : \mathcal{M}^{p_0}_p \to \mathcal{M}^{q_0}_q$ が成り立つ.

この講演では, Proposition 3 において M_α を $M_{B,\alpha}$ に拡張する.

2. Main results

Theorem 1. $0 \le \alpha < n$, $0 < p \le p_0 < \frac{n}{\alpha}$, $1 < q \le q_0 < \infty$, $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$, $\frac{q}{q_0} = \frac{p}{p_0}$ とする. さらに, *Young function* B に対して, $D(t) := B(t)\log^+(t)$ とする.

(i) $p > 1$, $B^{\frac{q}{p}} \in B_q$ とすると, $M_{B,\alpha} : \mathcal{M}^{p_0}_p \to \mathcal{M}^{q_0}_q$.

(ii) $p = 1$, $D(t) \lesssim t^{p_0}$ $(t \ge 1)$ とすると, $M_{B,\alpha} : \mathcal{M}^{p_0}_D \to \mathcal{M}^{q_0}_q$.

(iii) $0 < p < 1$, $B(t) \lesssim t^{p_0}$ $(t \ge 1)$ とすると, $M_{B,\alpha} : \mathcal{M}^{p_0}_B \to \mathcal{M}^{q_0}_q$.

参考文献

[1] D. Adams, *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J., 42 (1975), 765-778.

[2] D. Adams, *Morrey Spaces*, Lecture notes in applied and numerical harmonic analysis, Birkhauser/Springer, 2014.

[3] D. Cruz-Uribe, SFO and K. Moen, *A fractional Muckenhoupt-Wheeden theorem and its consequences*, Integr. Equ. Oper. Theory 76 (2013), 3, 421–446.

[4] D. Cruz-Uribe, SFO, José Maria Martell and C. Pérez, *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia. Operator Theory: Advances and Applications*, 215. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. xiv+280 pp.

[5] T. Iida, *Note on the integral operators in weighted Morrey spaces*, Hokkaido Math. J., Vol.48, No.2(2019).

[6] T. Iida and Y.Sawano, *Orlicz-fractional maximal operators on weighted L^p spaces*, J. Math. Ine., Accepted.

[7] C. Pérez, *On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p-spaces with different weights*, Proc. London Math. Soc. (3), 71(1), (1995), 135-157.

Dual of Choquet spaces with weighted Hausdorff content

齋藤 洋樹 (日本大学理工学部)*

Introduction and Results

The purpose of this talk is to determine the dual of the Choquet spaces with the weighted Hausdorff content by defining a variant of weighted Morrey spaces of Radon measures. Let $n \geq 2$ be the spatial dimension. For $d, 0 < d \leq n$, and non-negative measurable function w, the d-dimensional weighted Hausdorff content of $E \subset \mathbb{R}^n$ is defined by

$$H_w^d(E) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} r_j^d \fint_{B(x_j,r_j)} w(y)\, \mathrm{d}y : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j) \right\},$$

where $B(x_j, r_j)$ are balls centered at x_j and radius r_j, the infimum is taken over all coverings of E by the countable balls. The barred integral of B, $\fint_B f$ stands for the usual integral average of f over B. The integrals with respect to H_w^d are taken in the Choquet sense, that is, the Choquet integral of $f \geq 0$ with respect to a set function H_w^d is defined by

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p \,\mathrm{d}H_w^d := \int_0^\infty H_w^d(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\})\, \mathrm{d}t^p.$$

For any f satisfying $\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \,\mathrm{d}H_w^d < \infty$, we denote

$$\|f\|_{L^p(H_w^d)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \,\mathrm{d}H_w^d \right)^{1/p}.$$

We shall say that $f \in L^p(H_w^d)$, [2, 3], if f is the limit of continuous functions f_n with compact support on $\mathbb{R}^n$,

$$\|f - f_n\|_{L^p(H_w^d)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

The weighted fractional maximal operator of a Radon measure μ is defined by

$$M_{w,\alpha}\mu(x) = \sup_{r>0} r^\alpha \frac{|\mu|(B(x,r))}{w(B(x,r))} = \frac{1}{c_n} \cdot \sup_{r>0} \frac{|\mu|(B(x,r))}{r^d \fint_{B(x,r)} w\, \mathrm{d}y},$$

where c_n is the volume of the unit ball and $\alpha = n - d$. If we set $w \equiv 1$, $\mathrm{d}|\mu|(y) = |f(y)|\,\mathrm{d}y$ and $\alpha = n - d$, $M_{w,\alpha}$ is the usual fractional maximal operator

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} r^\alpha \fint_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

2010 Mathematics Subject Classification: 42B25

*e-mail: saitou.hiroki@nihon-u.ac.jp

We finally define a variant of the weighted Morrey spaces

$$\mathbb{L}_w^{q,d} := \{\mu : \text{Radon measure}, \|M_{w,\alpha}\mu\|_{L^q(H_w^d)} < \infty\},$$

where $1 < q \leq \infty$. We can define the (semi)-norm on this space by $|||\mu|||_{\mathbb{L}_w^{q,\alpha}} := \|M_{w,\alpha}\mu\|_{L^q(H_w^d)}$.

The main result of this talk is the following.

Theorem 1 *Suppose that w satisfies Muckenhoupt A_1 condition and*

$$\lim_{r\to\infty} r^d \fint_{B(x,r)} w(y)\,\mathrm{d}y = \infty.$$

Then, the dual of $L^p(H_w^d)$ is the weighted Morrey space $\mathbb{L}_w^{p',d}$, where $p' = \frac{p}{p-1}$. More precisely, if F is a bounded linear functional on $L^p(H_w^d)$, then there exists a Radon measure $\mu \in \mathbb{L}_w^{p',d}$ such that

$$F(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\, d\mu, \quad \text{for all } \phi \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

The norm of μ satisfies

$$|||\mu|||_{\mathbb{L}_w^{p',d}} \leq C_1\|F\|.$$

Conversely, if $\mu \in \mathbb{L}_w^{p',d}$,

$$F(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu, \quad f \in L^p(H_w^d)$$

defines a bounded linear functional of $L^p(H_w^d)$, and

$$\|F\| \leq C_2|||\mu|||_{\mathbb{L}_w^{p',d}}.$$

Remark. When $w \equiv 1$, the set of Radon measures

$$\mathcal{M}_d\mu(x) := \sup_{r>0} r^{-d}|\mu|(B(x,r)) \leq C \tag{1}$$

is called Morrey space of measures [1, 2]. The above theorem extends the unweighted result in Adams [2], Theorem 8. It should be remark that Adams denoted the Morrey space of measures by $\mathbf{L}^{1,d}$, [1, 2], however, it is natural to use the notation $\mathbb{L}^{\infty,d}$ satisfying (1), so that we can assert $L^p(H^d)^* = \mathbb{L}^{p',d}$.

参考文献

[1] D. R. Adams, *A note on the Choquet integrals with respect to Hausdorff capacity*, in Function Spaces and Applications, Proc., Lund 1986, Lecture Notes in Math. **1302**, 115–124, Springer, Berlin Heidelberg, 1988.

[2] D. R. Adams, *Choquet integrals in potential theory*, Publ. Mat. **42** (1998) 3–66.

[3] D. R. Adams and L. I. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Springer-Verlag, Heidelberg-New York, 1996.

[4] L. Tang, *Choquet integrals, weighted Hausdorff content and maximal operators*, Georgian Math. J. **18** (2011), no. 3, 587–596

[5] B. O. Turesson, *Nonlinear Potential Theory and Weighted Sobolev Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 1736. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

メビウス型包除積分ニューラルネットワークによるデータ解析

本田あおい　(九工大情報工)*1
大北 剛　　(九工大情報工)*2

本講演では包除積分数理モデルを用いた機械学習的なデータ解析手法を提案する. 対象とする問題は教師あり学習で, これは事前に与えられたデータへのあてはまりがよくなるように学習してモデルの同定を行うものである. これまでに提案してきた包除積分数理モデルによる統計的データ解析手法に機械学習の手法を取り入れることで, 双方の長所を合わせ持つデータ解析手法となることが期待できる. 具体的には, 構築されたモデルの解釈が可能であるというメビウス型包除積分数理モデルの長所を残したまま, データを前処理することなく自動で学習ができる他 効果的な初期値の設定方法の考案や, ニューラルネットワークで使われている色々な学習トリックの仕組みの解析やこれらを生かした新たな改良が期待できる.

定義 1 (メビウス型包除積分モデル Cf.[1])　N 個の数値からなる説明変数の組 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_N) \in [0, K]^N, 0 < K \leq \infty$ を $X = \{1, \ldots, n, \ldots, N\}$ 上の関数とする. メビウス型包除積分モデルは次のように定義される積分である:

$$
\begin{aligned}
y(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{w}, \otimes) &:= \sum_{A \in \mathcal{P}(X)} w_A \left(\bigotimes_{n \in A} x_n \right) \\
&:= \sum_{A \in \mathcal{P}(X)} w_A \left(\bigotimes_{n \in A} h(a_n x_i + b_n) \right).
\end{aligned}
$$

ここで, $\mathcal{P}(X)$ は X の部分集合全体, $\boldsymbol{w} = \{w_A\}_{A \in \mathcal{P}(X)}$, 関数 h はシグモイド関数などの単調な $[0, K]$ 値関数で活性化関数と呼ばれる. $\otimes$ は 2 項演算から自然に定義される多項演算, ただし $\displaystyle\bigotimes_{n \in \emptyset} x_n := K$ である.

$\otimes$ には t-ノルムのような掛け算型の演算を使用すると, 包除積分がよい性質を持つことが分かっている. 代表的な例は $\min$ 演算, あるいは掛け算 (この場合, $K = 1$ とする) である. 例えば, $X = \{1, 2, 3\}$ のとき, $\otimes$ を掛け算, $K = 1$ としてメビウス型包除積分モデルを書き下すと

$$
\begin{aligned}
y(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{w}, \times) &= w_{\{1\}} x_1 + w_{\{2\}} x_2 + w_{\{3\}} x_3 + w_{\{1,2\}} x_1 x_2 + w_{\{1,3\}} x_1 x_3 \\
&\quad + w_{\{2,3\}} x_2 x_3 + w_{\{1,2,3\}} x_1 x_2 x_3 + w_{\emptyset}
\end{aligned}
$$

教師あり学習では説明変数の組にそれぞれ目的変数 $y \in \mathbb{R}$ が与えられており, $(\boldsymbol{x}, y)$ の組になっている. データ番号を上付きの添え字 m で表すことにすると, 教師データとして M 件のデータを使用する場合には学習は教師データ $\mathcal{D} = \{(\boldsymbol{x}^1, y^1), \ldots, (\boldsymbol{x}^m, y^m), \ldots, (\boldsymbol{x}^M, y^M)\}$ を用いて, 誤差関数 $E(\boldsymbol{w}, \otimes)$ を最小化するものを選ぶ. この誤差関数は問題に応じて二乗誤差や交差エントロピー:

*1 e-mail: aoi@ces.kyutech.ac.jp
*2 e-mail: tsuyoshi.okita@gmail.com

$$E_{SE}(\boldsymbol{w}, \otimes) \;=\; \sum_{m=1}^{M} |y^m - y(\boldsymbol{x}_m; \boldsymbol{w}, \otimes)|^2,$$

$$E_{CE}(\boldsymbol{w}, \otimes) \;=\; -\sum_{m=1}^{M} \sum_{\ell=1}^{L} y_\ell^m \log y_\ell(\boldsymbol{x}^m; \boldsymbol{w}, \otimes)$$

等を用いるもので, 学習とはこれを小さくすることである. 教師データで学習し誤差関数 E を最小化するような重みと演算の組 $(\boldsymbol{w}, \otimes)$ を求める. 例えば勾配降下法ならば勾配 $\nabla E(\boldsymbol{w}, \otimes)$ を計算し, $\boldsymbol{w}^{(t+1)} = \boldsymbol{w}^{(t)} + \varepsilon \nabla E(\boldsymbol{w}, \otimes)$ を 1 エポックの重み $\boldsymbol{w}$ の更新とする. 図 1 は $N = 3$, つまり $X = \{1, 2, , 3\}$ の場合のメビウス型包除積分モデルを離散グラフで表したもので, これをメビウス型包除積分ネットワークと呼ぶことにする:

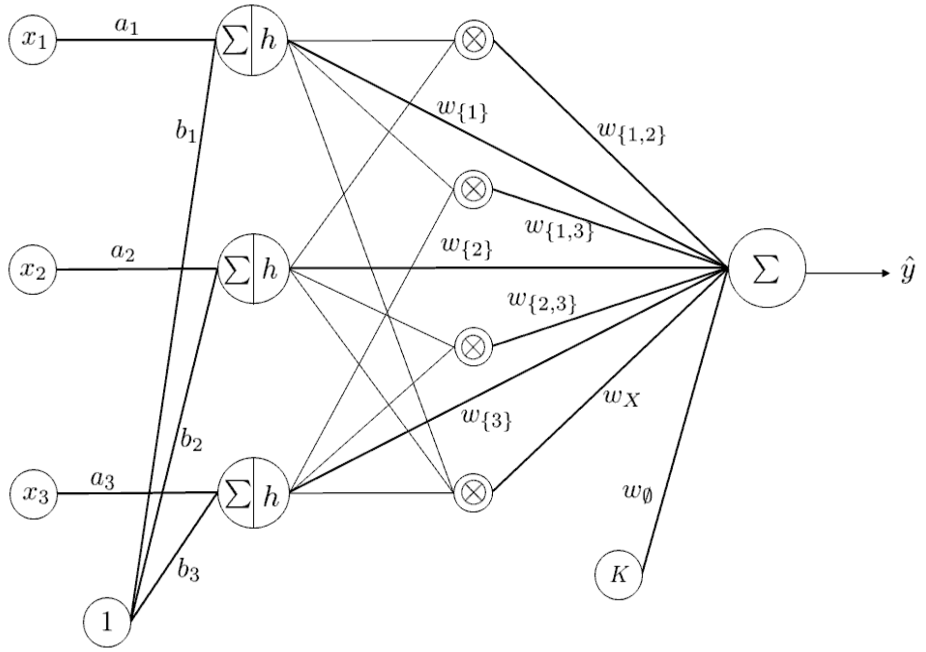

図 1: $X = \{1, 2, , 3\}$ の場合のメビウス型包除積分ネットワーク

図が示すように, メビウス型包除積分ネットワークでは. 通常のニューラルネットワークと異なり全てのユニット間にエッジがつながっているわけではない. 一方, ニューラルネットワークにおいても確率的にノードの無効化（ドロップアウト）やエッジの無効化を行うことが過完備表現の抑制に有効であることが知られている. これらはスパース正則化の観点に沿った手法であり適切なアルゴリズムの確立が求められている.

講演では機械学習用の標準的なデータを用いた実験結果を使って, 他の手法と比較しながらスパース正則性の観点からメビウス型包除積分モデルを考察する.

参考文献

[1] A. Honda, Y. Okazaki, Theory of inclusion-exclusion integral, *Information Science*, **376**, pp. 136-147, 2017.

[2] 本田あおい, 包除積分数理モデルを用いた多変量データ解析, 知能と情報 (日本知能情報ファジィ学会誌) 解説論文, **30**, (4), pp. 183-192, 2018.

Pan積分の拡張と単調収束定理

福田亮治 (大分大理工)[*1]
本田あおい (九工大情報工)[*2]
岡崎 悦明 (ファジィシステム研究所)[*3]

1. はじめに

非加法的単調測度に関する積分は種々の定義が考案されている．これらは分布関数型積分と分割型積分に分けられる．分布関数型の積分に対する収束定理については河邊淳氏により自身の研究と関連研究を合わせた統一的な理論が展開されている [1]．また分割型積分に対しては，近年著者らがいくつかの十分条件を与えている [2, 3, 4]. 本講演ではPan積分を拡張し，単調収束定理に関わる諸性質について，この積分に関して得られた性質を報告する.

2. Pan積分の拡張

本報告を通して$(X,\mathcal{B})$を可測空間とし，$(X,\mathcal{B})$上の単調測度について上下からの連続性を仮定する. Pan積分及びその拡張に必要な，単関数の集合を次のように定める.

(a) $\mathcal{S}' = \{\{(a_k, A_k)\}_{k=1}^n : n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{R}, A_k \in \mathcal{B}, \{A_k\}$ は互いに素$\}$.

(b) $\mathcal{S}'_{\sigma,\mu} = \{\{(a_k, A_k)\}_{k=1}^\infty : a_k \in \mathbb{R}, A_k \in \mathcal{B}, \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\mu(A_k) < \infty, \{A_k\}$ は互いに素$\}$.

$\varphi = \{(a_k, A_k)\}$を単関数とみるときは$\varphi(x) = \sum a_k \chi_{A_k}(x)$と考えることにする. ただしこの表現に一意性はなく，単関数の積分に相当する基本和$\mu(\varphi) = \sum a_k \mu(A_k)$ は，関数として同じでも同じとは限らないので，単関数は上の設定通り数値と集合の対の列として考える.

定義 1 $(X,\mathcal{B})$ 上の可測関数 f に対して，次で2種類の積分を定義する.

$$\int^{\mathrm{pan}} f d\mu = \sup\{\mu(\varphi) : \varphi \in \mathcal{S}',\ \varphi(x) \le f(x), \quad \forall x \in X\}$$

$$\int_{\sigma}^{\mathrm{pan}} f d\mu = \sup\{\mu(\varphi) : \varphi \in \mathcal{S}'_{\sigma,\mu},\ \varphi(x) \le f(x), \quad \forall x \in X\}$$

前者が通常のPan積分であり，後者は近似単関数に対して可算和を許す，拡張した積分である.

これらの積分は，単調性があるが一般に線形性を持たない. これらの積分に対して次の単調増加収束定理が成り立つ.

定理 2 f, f_n （$n \in \mathbb{N}$）を $(X,\mathcal{B})$ 上の可測関数とし，$f_n(x) \nearrow f(x),\ \forall x$とするとき，次が成り立つ.

[*1] e-mail: rfukuda@oita-u.ac.jp
[*2] e-mail: aoi@ces.kyutech.ac.jp
[*3] e-mail: okazaki@flsi.or.jp

$$\text{(a)}\ -\infty < \int^{\mathrm{pan}} f_1 d\mu \le \int^{\mathrm{pan}} f d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \int^{\mathrm{pan}} f_n d\mu \nearrow \int^{\mathrm{pan}} f d\mu,$$

$$\text{(b)}\ -\infty < \int_{\sigma}^{\mathrm{pan}} f_1 d\mu \le \int_{\sigma}^{\mathrm{pan}} f d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_{\sigma}^{\mathrm{pan}} f_n d\mu \nearrow \int_{\sigma}^{\mathrm{pan}} f d\mu,$$

3. k-加法的測度空間での収束定理

自然数 k に対して，$X^{(k)} = \{(x_i)_{i=1}^k : x_i \in X, i \neq \ell \Rightarrow x_i \neq x_\ell\}$, なる空間を考える．ただし $(x_i)_{i\le k}, (x'_i)_{i\le k}$ は, k 点集合として等しければ同一視し，制限と同値類から自然に定まる σ-集合体 $\mathcal{B}^{(k)}$ と共に可測空間として考えることにする．

定義 3 $(X, \mathcal{B})$ 上の単調測度 μ が自然数 k に対して,(構成的に)k-加法的であるとは，$(X^{(k')}, \mathcal{B}^{(k')})$ 上の実測度 $\mu_{k'}$ $(k' = 1, 2, \dots k)$ を用いて，次で表されることとする．

$$\mu(A) = \sum_{k'=1}^{k} \mu_{k'}(A^{(k')}), \quad A \in \mathcal{B}, \quad A^{(k')} = \{(x_j)_{j\le k'} \in X^{(k')} : x_j \in A,\ \forall j \le k'\}$$

この定義は有限集合上の単調測度に対するメビウス変換を対応する集合の個数で整理したものを基礎としている．有限集合上(個数を k とする)の任意の単調測度が，k-加法的であることを考えると，優(劣)加法性に係わる性質については，かなり一般的な測度を表現することができると予想している．

一般に Pan 積分に関する単調減少収束定理は, 測度に劣加法性がある場合や, 関数列が一様収束している場合など，特殊な場合にしか示されていない．k-加法的測度については次のような定理が成り立つ．

定理 4 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を k-加法的単調測度空間とする．$\{f_n\}$ を各点で f に単調減少収束する可測関数列で，$\sup_{n,x}\{|f_n(x)|, |f(x)|\} < \infty$ であるとき次が成り立つ．

$$\int^{\mathrm{pan}} f_n d\mu \searrow \int^{\mathrm{pan}} f d\mu, \quad \int_{\sigma}^{\mathrm{pan}} f_n d\mu \searrow \int_{\sigma}^{\mathrm{pan}} f d\mu.$$

参考文献

[1] 河邊　淳，非線形積分の収束定理の統一的定式化，第 56 回実函数論・関数解析学合同シンポジウム講演集，pp.35–54，2017.

[2] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 非分布関数型ファジィ積分に関する収束定理, 数理解析研究所考究録 2112 「非線形解析学と凸解析学の研究」, pp.134-140,2019

[3] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 非加法的単調測度による弱凸積分と単調収束定理実解 析学シンポジウム 2018 報告集,pp.97-102，2018

[4] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 分割型非線形積分の収束定理 (解説論文), 知能と情報 (日本知能情報ファジィ学会誌)Vol.31,No.4,pp.108-115,2019

フォン・ノイマン環の前双対における Birkhoff 直交性の左対称点について

田中 亮太朗 (東京理科大), 小室 直人 (北教大旭川), 斎藤 吉助 (新潟大)

近年、バナッハ空間論の幾何に近い領域では、Birkhoff 直交性の局所対称性に関する研究が盛んに行われている。

定義 1 (Birkhoff 直交性 [2])**.** X を $\mathbb{K}$ 上のバナッハ空間とし、$x, y \in X$ とする。そのとき、x が y に Birkhoff 直交するとは、$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ がすべてのスカラー $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して成立することをいい、$x \perp_B y$ で表される。

この概念は、1935 年に Birkhoff [2] により導入され、後に James [3, 4] により種々の重要な性質が研究されたことから、Birkhoff-James 直交性などとも呼ばれる。単純な計算から、ヒルベルト空間においては、内積から定まる通常の直交性 $\perp$ と Birkhoff 直交性 $\perp_B$ とは同値であることがわかり、このことから、Birkhoff 直交性は一般化された直交性（の一つ）と言われている。ヒルベルト空間では直交という言葉一つに尽きるが、一般のバナッハ空間においては、Birkhoff 直交性は接汎関数や接超平面等の概念を用いて研究されることが多い。例えば、$\|x\| = 1$ のとき、$x \perp_B y$ は幾何的には $\{x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{K}\}$ が単位球の接線となることを意味するし、James [3] による次の特徴付けも良く知られている。

補題 2 (James [3])**.** X を $\mathbb{K}$ 上のバナッハ空間とし、$x, y \in X$ とする。そのとき、$x \perp_B y$ であることと、ある $f \in S_{X^*}$ が存在して、$f(x) = \|x\|$ かつ $f(y) = 0$ となることとは同値である。ここで、X^* は X の双対空間、S_{X^*} はその単位球面を表す。

$x \neq 0$ のとき、この補題にあらわれる f は $\|x\|^{-1}x$ における X の単位球の接汎関数であることに注意しておく。これらの関連性から、Birkhoff 直交性は、バナッハ空間の理論の幾何的な議論において、しばしば重要な役割を果たす。

さて、関係 $\perp_B$ は、その定義から同次性（homogeneity）を持つことがわかる。つまり、$x \perp_B y$ であれば、任意のスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して $\alpha x \perp_B \beta y$ が成立する。一方で、$\perp_B$ はほとんどの場合で対称性（symmetry）を持たない。実際、3 以上の次元を持つバナッハ空間で、$x \perp_B y \Rightarrow y \perp_B x$ が成立するものはヒルベルト空間しかないことが知られている（[4]）。この強力な定理が示されてからは、長い間、Birkhoff 直交性の対称性そのものに着目した研究は行われてこなかったようである。しかし、2005 年に Turnšek [8] が $\perp_B$ の局所対称性に関する面白い考察を与えてからは、Arambašić-Rajić [1]、Sain [6]、Sain-Ghosh-Paul [7] 等が関連研究に次々に参入し、Birkhoff 直交性の局所対称性は活発な研究領域へと発展を遂げた。

本講演では、Birkhoff 直交性の局所対称性に関する研究の一つとして、フォン・ノイマン環の前双対における $\perp_B$ の左対称点（left symmetric point）の特徴付けを報告する。次の定義は、Sain [6] による。また、関連する論文として、Sain-Ghosh-Paul [7] も参照されたい。

定義 3 (Sain [6])**.** X を $\mathbb{K}$ 上のバナッハ空間とし、$x \in X$ とする。そのとき、x が Birkhoff 直交性に関する左対称点であるとは、$y \in X$ かつ $x \perp_B y$ ならば $y \perp_B x$ が成立することをいう。

次が本講演の主定理である。

定理 4 ([5])**.** $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とする。もし、その前双対 $\mathcal{R}_*$ が Birkhoff 直交性に関する左対称点で 0 でないものを持つなら、次のいずれかが成立する。

(i) $\mathcal{R} = \mathbb{C}$ であり、$\mathcal{R}_* = \mathbb{C}$ の各点が Birkhoff 直交性の左対称点となる。
(ii) $\mathcal{R} = \ell^2_\infty$ であり、$\rho \in \mathcal{R}_* = \ell^2_1$（$\rho \neq 0$）が Birkhoff 直交性に関する左対称点であることと、$\|\rho\|^{-1}\rho \in \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : |a| = |b| = 1/2\}$ とは同値である.
(iii) $\mathcal{R} = M_2(\mathbb{C})$ であり、$\rho \in \mathcal{R}_* = (M_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$（$\rho \neq 0$）が Birkhoff 直交性に関する左対称点であることと、$\|\rho\|^{-1}\rho \in \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \sigma_1 = \sigma_2 = 1/2\}$ とは同値である。ここで、σ_1, σ_2 は A の特異値を表す。

この定理から、Birkhoff の直交性に関する非自明な左対称点を持つフォン・ノイマン環の前双対はとても少ないことがわかる。設定が少々大げさだが、実は、議論の本質は 3 次元空間 $\ell^3_1 = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_1)$ にある。講演では、その辺りのアイデアを中心にお話ししたい。

参考文献

[1] Arambašić and Rajić, *On symmetry of the (strong) Birkhoff-James orthogonality in Hilbert C^*-modules*, Ann. Funct. Anal., **7** (2016), 17–23.

[2] G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J., **1** (1935), 169–172.

[3] R. C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **61** (1947), 265–292.

[4] R. C. James, *Inner product in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 559–566.

[5] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *Left symmetric points for Birkhoff orthogonality in the preduals of von Neumann algebras*, Bull. Aust. Math. Soc., **98** (2018), 494–501.

[6] D. Sain, *Birkhoff-James orthogonality of linear operators on finite dimensional Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **447** (2017), 860–866.

[7] D. Sain, P. Ghosh and K. Paul, *On symmetry of Birkhoff-James orthogonality of linear operators on finite-dimensional real Banach spaces*, Oper. Matrices, **11** (2017), 1087–1095.

[8] A. Turnšek, *On operators preserving James' orthogonality*, Linear Algebra Appl., **407** (2005), 189–195.

Day-James空間における幾何学的定数について

三谷健一　(岡山県立大 情報工学部)

斎藤吉助　(新潟大 自然科学系)

本講演では，von Neumann-Jordan定数(以下, NJ定数)を中心とした幾何学的定数の計算に関する最近の結果を述べる。特にDay-James空間ℓ_p-ℓ_qにおいて考える。この空間におけるNJ定数の値に関しては，2001年に加藤-Maligranda-高橋[1]が未解決な問題としてとり上げて以降，C. Yangを中心に精力的に研究されている([5, 6, 7, 8])。ここではBanach-Mazur距離との関係を用いたNJ定数の計算方法を紹介する。また, 他の幾何学的定数についても同様に考察する。

参考文献

[1] M. Kato, L. Maligranda, Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math. **144** (2001), 275-295.

[2] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, Y. Takahashi, *On the von Neumann-Jordan constant of generalized Banaś-Frączek spaces*, Linear Nonlinear Anal. **2** (2016), 311-316.

[3] K.-I. Mitani, Y. Takahashi, K.-S. Saito, *On von Neumann-Jordan constant of ℓ_p-ℓ_q spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **19** (2018), 1705-1709.

[4] Y. Takahashi, *Some geometric constants of Banach spaces-a unified approach*, Banach and function spaces II, 191-220, Yokohama Publ., Yokohama, 2008.

[5] C. Yang, *An inequality between the James type constant and the modulus of smoothness*, J. Math. Anal. Appl. **398** (2013), 622-629.

[6] C. Yang, H. Li, *On the James type constant of ℓ_p-ℓ_1*, J. Inequal. Appl. **2015**: Article ID 79 (2015).

[7] C. Yang, F. Wang, *On a new geometric constant related to the von Neumann-Jordan constant*, J. Math. Anal. Appl. **324** (2006), 555-565.

[8] C. Yang, F. Wang, *The von Neumann-Jordan constant for a class of Day-James Spaces*, Mediterr. J. Math. **13** (2016), 1127-1133.

[9] G. Zbăganu, *An inequality of M. Rădulescu and S. Rădulescu which characterizes the inner product spaces*, Rev. Roumaine Math. Pure Appl. **47** (2002), 253-257.

Fixed points, absolute fixed points and convergence theorems for nonlinear mappings

厚芝幸子 (Sachiko Atsushiba) (山梨大学大学院教育学研究科)*

Let H be a real Hilbert space with inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and norm $\|\cdot\|$ and let C be a nonempty subset of H. A mapping $T : C \to H$ is said to be nonexpansive if $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ for all $x, y \in C$. For a mapping $T : C \to H$, we denote by $F(T)$ the set of fixed points of T and by $A(T)$ the set of attractive points [13] of T, i.e.,

(i) $F(T) = \{z \in C : Tz = z\}$;

(ii) $A(T) = \{z \in H : \|Tx - z\| \leq \|x - z\|, \ \ \forall x \in C\}$.

Kohsaka and Takahashi [5], and Takahashi [12] introduced the following nonlinear mappings. A mapping $T : C \to H$ is said to be nonspreading [5] if

$$2\|Tx - Ty\|^2 \leq \|Tx - y\|^2 + \|Ty - x\|^2$$

for all $x, y \in C$. A mapping $T : C \to H$ is said to be hybrid [12] if

$$3\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|Tx - y\|^2 + \|Ty - x\|^2$$

for all $x, y \in C$. They proved fixed point theorems for such mappings (see also [3, 6, 14]). In general, nonspreading and hybrid mappings are not continuous mappings. Aoyama, Iemoto, Kohsaka and Takahashi [1] introduced the class of λ-hybrid mappings in a Hilbert space. This class contains the classes of nonexpansive mappings, nonspreading mappings, and hybrid mappings in a Hilbert space. Kocourek, Takahashi and Yao [4] introduced a broader class of nonlinear mappings than the class of λ-hybrid mappings in a Hilbert space. A mapping $T : C \to E$ is said to be generalized hybrid [4] if there are real numbers α, β such that

$$\alpha\|Tx - Ty\|^2 + (1 - \alpha)\|x - Ty\|^2 \leq \beta\|Tx - y\|^2 + (1 - \beta)\|x - y\|^2$$

for all $x, y \in C$.

Maruyama, Takahashi and Yao [8] introduced a broad class of nonlinear mappings called 2-generalized hybrid which contains generalized hybrid mappings in a Hilbert space. Kondo and Takahashi [7] proved attractive point theorems, fixed point theorems and convergence theorems for the mappings.

* Department of Mathematics, Graduate School of Education, University of Yamanashi, 4-4-37, Takeda Kofu, Yamanashi 400-8510, Japan
e-mail: asachiko@yamanashi.ac.jp

On the other hand, Djafari Rouhani [9] introduced the concept of absolute fixed points for nonexpansive mappings. He established the existence of absolute fixed points of hybrid mappings (see [10]).

In this talk, we prove weak and strong convergence theorems for nonlinear mappings in Hilbert spaces and Banach spaces by using the idea of attractive points and absolute fixed points.

参考文献

[1] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, W. Takahashi, Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces, J. Nonlinear Convex Anal. 11 (2010), 335-343.

[2] S. Atsushiba, Nonlinear ergodic theorems for normally 2-generalized hybrid sequences, J. Nonlinear Convex Anal. 21 (2019), 251—264.

[3] S. Iemoto, W. Takahashi, Approximating common fixed points of nonexpansive mappings and nonspreading mappings in a Hilbert space, Nonlinear Anal. 71 (2009), 2082-2089.

[4] P. Kocourek, W. Takahashi, J.-C. Yao, Fixed point theorems and weak convergence theorems for generalized hybrid mappings in Hilbert spaces, Taiwanese J. Math. 14 (2010), 2497-2511.

[5] F. Kohsaka, W. Takahashi Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces, Arch. Math. (Basel) 91 (2008), 166-177.

[6] F. Kohsaka, W. Takahashi Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces, SIAM J. Optim. 19 (2008) 824-835.

[7] A. Kondo, W. Takahashi, Attractive point and weak convergence theorems for normally N -generalized hybrid mappings in Hilbert spaces, Linear Nonlinear Anal. 3 (2017), 297-310.

[8] T. Maruyama, W. Takahashi, M. Yao Fixed point and mean ergodic theorems for new nonlinear mappings in Hilbert spaces, J. Nonlinear Convex Anal. 12 (2011), 185-197.

[9] B. Djafari Rouhani, On the fixed point property for nonexpansive mappings and semigroups, Nonlinear Anal. 30 (1997), 389-396.

[10] B. Djafari Rouhani, Ergodic theorems for hybrid sequences in a Hilbert space with applications, J. Math. Anal. Appl. 409 (2014), 205-211.

[11] B. Djafari Rouhani, Ergodic and fixed point theorems for sequences and nonlinear mappings in a Hilbert space, Demonstratio Math. 51 (2018), 27-36.

[12] W. Takahashi, Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space, J. Nonlinear Convex Anal. 11 (2010), 79-88.

[13] W. Takahashi, Y. Takeuchi, Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space, J. Nonlinear Convex Anal. 12 (2011), 399-406.

[14] W. Takahashi, J.-C. Yao, Fixed point theorems and ergodic theorems for nonlinear mappings in Hilbert spaces, Taiwanese J. Math. 15 (2011), 457-472.

フーリエ・ベッセル変換について

積分の "総和法" など

岡田　正已　(首都大学東京（客員研究員）)*

1. 概要

既に周知の常識的な事柄なのかもしれないが、フーリエ変換について、現役時代から気になっていた素朴なことを若干調べたので報告させて頂く。例えばリースポテンシャル函数のように、直線 $\mathbb{R}$ 上で局所可積分ではあるが可積分と限らない函数 f にたいするフーリエ変換についての一般論（もどき）である。勿論、f が一般にシュワルツの緩増加超関数 $\mathcal{S}'$ のクラスの元であれば、変換を受けた函数 $\hat{f}$ は、同じクラスに属す元として一意に定まるが、例えば、$\mathbb{R}$ 上で任意に一つの有界函数 f が与えられたときに、そのフーリエ変換像 $\hat{f}(\xi)$ に関して、どの程度、具体的なことが云えるのだろうか？　まず問題になりそうなのは、$\hat{f}$ が（局所）可積分になるための条件かもしれない。動機となったのは、やはり多次元のリースポテンシャル函数のような radial 函数という特別の場合でさえ (一次元に帰着されるので) 簡単そうに見えるが、ベッセル函数が現れたり、可積分性に拘ると（自分には）案外、面倒な気がして、それ以上、計算が進められないように感じたからである。

可積分でない関数のフーリエ変換のためには、級数の場合のように適当なウェイト函数を掛けて積分してから極限をとる（つまりは軟化子を考えることに対応)、即ち、積分に対する適当な総和法を考えることにする。ワトソンによるベッセル函数の古典文献でも明らかなように、これは既に１９世紀から行われていたことである。歴史的なことに興味を持って、一応は数学辞典などをチェックしたものの、浅学のため、もとより新規性や研究の意義、今後の発展の可能性などについて自信がない。ご教示を頂ければ幸いである。[実解析学シンポジウム 2019（九州工業大学）一般講演　概要]

参考文献

[1] 猪狩　惺，フーリエ級数，岩波書店 1975.

[2] Y. Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, John Wiley Sons, Inc. 1968.

[3] Y. Meyer, Ondelettes et Operateurs, Hermann 1990

[4] 溝畑　茂, 偏微分方程式論, 岩波書店 1965

[5] A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov and O.I.Marichev, Integrals and Series vol.1, Gordon and Breach, 1986.

[6] 澤野 嘉宏, ベゾフ空間論, 日本評論社 2011.

[7] 洲之内源一郎, フーリエ解析とその応用，サイエンス社 1977.

[8] 数学辞典, 第３版, 岩波書店 1985

[9] G.N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press 1922, (2nd ed., 1944, paperback 1995).

[10] A. Zygmund, Trigonometric Series I,II, Cambridge University Press 1935, (2nd ed., 1959, with corrections 1968).

* 〒192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1　首都大学東京 大学院理工学研究科
e-mail: moka@tmu.ac.jp

MATRIX FUNCTIONS AND MATRIX ORDER

Mitsuru Uchiyama (Shimane Univ., Ritsumeikan Univ.(Guest))
Lawrence G. Brown (Purdue Univ.)

1. Introduction

Let $f(t)$ be a real continuous function defined on a non-degenerate interval J in the real axis. For a bounded self-adjoint operator (or matrix) A on a Hilbert space $\mathbf{H}$ whose spectrum is in J, $f(A)$ is well-defined.

Definition 1.1. (i) f is called an *operator monotone function* on J, denoted by $f \in \mathbf{P}(J)$, if

$$f(A) \leqq f(B) \text{ whenever } A \leqq B.$$

f is said to be *operator decreasing* if $-f$ is operator monotone.
(ii) f is called an *operator convex function* on J if

$$f(sA + (1-s)B) \leqq sf(A) + (1-s)f(B)$$

for every $0 < s < 1$ and for every pair A, B with spectra in J. An *operator concave function* is similarly defined.

Example 1.1. *(i) t^λ is operator monotone and operator concave on $(0, \infty)$ for $0 \le \lambda \le 1$.*
(ii) For $1 < \lambda \le 2$, t^λ is operator convex but not operator monotone.
(iii) $1/t$ is operator decreasing and operator convex on $(0, \infty)$.
(iv) $\tan t \in \mathbf{P}(-\pi/2, \pi/2)$.

The **Löwner** (or **Loewner**) theorem (1934) says that a C^1-function f is operator monotone on an open interval J if and only if f possesses a holomorphic extension $f(z)$ into the open upper half plane Π_+ which maps Π_+ into itself (unless f is constant), namely $f(z)$ is a *Pick function.* In this case, $f(t)$ has an integral representation:

$$f(t) = \alpha + \beta t + \int_{-\infty}^{\infty} (-\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x-t}) d\nu(x), \tag{1}$$

where α is real, $\beta \geqq 0$ and ν is a Borel measure so that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} d\nu(x) < \infty, \quad \nu(J) = 0.$$

Bendat-Sherman (1965) have shown that a C^1-function $g(t)$ on an open interval J is operator convex if and only if

$$K_g(t, t_0) := \tfrac{g(t)-(t_0)}{t-t_0} \quad (t \neq t_0), \quad K_g(t_0, t_0) = g'(t_0)$$

is operator monotone on J for every $t_0 \in J$.
Uchiyama(2010) proved that $g(t)$ is operator convex if $K_g(t, t_0)$ is operator monotone for one point $t_0 \in J$.
By using this, **B. Simon** showed that $\frac{\tan t}{t}$ is operator convex.
Davis (1957) has shown that g is an operator convex function on J if and only if

$$Pg(PAP)P \leq Pg(A)P$$

for every A with spectrum in J and for every orthogonal projection P.

Definition 1.2. *(***Brown** *1988, 2018) g is called strongly operator convex function and denoted by $g \in \mathbf{SOC}(J)$ if*

$$Pg(PAP)P \leq g(A)$$

for every A with spectrum in J and for every orthogonal projection P.

It is clear that a strongly operator convex function is operator convex and that the identity function $f(t) = t$ is not strongly operator convex on any interval.

2. Strongly operator convex functions (Brown-U)

Theorem 2.1. Let $g(t)$ be a continuous function on J such that $g(t) > 0$. Then the following are mutually equivalent.
(i) $g \in \mathbf{SOC}(J)$.
(ii)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}g(A) + \frac{1}{2}g(B) - g(\frac{A+B}{2})\\ \geq&\frac{1}{4}\left(g(A) - g(B)\right)\{\frac{1}{2}g(A) + \frac{1}{2}g(B)\}^{-1}\left(g(A) - g(B)\right).\end{aligned}$$

(iii) $1/g(t)$ is operator concave.

Theorem 2.2. (i) $0 \neq g \in \mathbf{SOC}(0, \infty)$ if and only if $g(t) > 0$ and $g(t)$ is operator decreasing.
(ii) g in $\mathbf{SOC}(0, \infty)$ is a completely monotone function, i.e., $(-1)^n g^{(n)}(t) \geqq 0$ $(0 < t < \infty)$ for $n = 0, 1, 2, \cdots$.

Theorem 2.3. Let $f(t)$ be a continuous function on J and $t_0 \in J$. Then $f(t)$ is operator monotone if and only if $K_f(t, t_0)$ is strongly operator convex.

Proposition 2.4. (cf. Ju. L. Šmul'jan 1965) Let $f(t)$ be a function on a finite interval (a, b). Then

(i) If f is operator concave and operator monotone on (a, b), then f has an extension $\tilde{f}$ to (a, ∞) such that $\tilde{f}$ is operator concave and operator monotone on (a, ∞).
(ii) If f is operator convex and operator decreasing on (a, b), then f has an extension $\tilde{f}$ to (a, ∞) such that $\tilde{f}$ is operator convex and operator decreasing on (a, ∞).

Walsh Fourier Analysis と 測度

米田　薫（大阪府立大学・名誉教授）

「研究をする」とは「問題」を解くことが目的なのだろうか。もちろん未解決の「問題」を解くことは重要である。それと同等以上に重要なのは「問題を見つけること」である。さらに、その「研究」の分野が他の分野（数学だけに限らない）とどのような関連をもっているかをも考えなければならない。あらゆる「研究・分野」はそれだけが孤立してあるわけではない。

広く見た Fourier Analysis の中に Walsh-Fourier Analysis という分野があるが、２０年ほど前までは日本にもこの分野の研究者が居られた。現在でも外国ではハンガリー、ロシア、ドイツ、アメリカなどで研究が続いている。著者もこの分野を研究の対象の一つにしている。当時から著者はこの分野の研究が、実用的応用を別にして、数学だけに限れば、Trigonometric Fourier Analysis の analogy を追っているように思えてならなかった。この傾向は諸外国の研究でも同様に感じられた。研究の多くが、例えば、Walsh-Fourier Series の収束問題、Cesàro 総和可能性、Uniqueness 問題…等であって、Walsh Fourier Analysis が他の分野とどのようにかかわっているか、特に数学の中でどのような役割を果たしているのかについての言及にたどり着かなかった。Walsh-Fourier Analysis にはこの分野しか果たせない役割があるはずである。それは数学の各分野を繋ぐ鎖の一つの輪としてこの分野の役目になっているはずである。

1　Walsh-Fourier Series についてのメモ

<u>Walsh-Fourier Series の舞台</u>：０と１の数列 $t=(t_1,t_2,\cdots)$ の集合 $\underline{I_0^0}$ に演算 $\dot{+}$ を入れる。$t\dot{+}t'=(u_1,u_2\cdots)$、ここで $u_k\equiv|t_k-t'_k|=t_k+t'_k(mod\ 2)$.。これにより I_0^0 は２進群になる。

<u>Walsh Function</u>：I_0^0 上の関数を $w_{2^n}(t)\equiv(-1)^{t_{n+1}}$ とし、$N=\sum_{k=1}^{s}2^{n_k}$ のとき、

$$w_0(t)\equiv 1\quad w_N(t)\equiv w_{2^{n_1}}(t)\cdot w_{2^{n_2}}(t)\cdot\cdots w_{2^{n_s}}(t)$$

とする。$w_N(t)$ $(N=0,1,2,\cdots)$ は I_0^0 で正規で完備な直交系になる。さらに $w_n(t\dot{+}t')=w_n(t)w_n(t')$ の関係がある。

<u>Walsh Series</u>： 形式的な級数 $\sum_{N=0}^{\infty} c_N w_N(t)$ を Walsh Series という。特に、関数の積分を使って $c_N=\int_{I_0^0} f(t)w_N(t)dt$ と書けるとき、この Walsh Series を Walsh-Fourier Series と呼ぶ。このとき、$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{2^N-1} c_k w_k(t)=f(t)$ $a.e$ が成り立っている。

<u>Quasi-Measure（擬測度）</u>： 集合 I_0^0 を分割する。$I_0^0=I_1^0\cup I_1^1$ $(disjoint)$、ここで I_1^0 は $t_1=0$ である I_0^0 の部分集合、同様に I_1^1 は $t_1=1$ である部分集合とする。これを以下同様に続けて I_N^p は $\sum_{k=1}^{N}\frac{t_k}{2^k}=\frac{p}{2^N}$ を満たす t_k が固定されている I_0^0 の部分集合とする。このような集合の間には <u>$I_N^p=I_{N+1}^{2p}\cup I_{N+1}^{2p+1}$ $(disjoint)$</u> の関係がある。I_N^p の大まかなイメージは $[\frac{p}{2^N},\frac{p+1}{2^N})$ である。

m が I_0^0 上の <u>Quasi-Measure</u> とは、$m(I_N^p)$ は実数値の集合関数で

$$m(I_N^p)=m(I_{N+1}^{2p})+m(I_{N+1}^{2p+1})\quad (N=0,1,2,\cdots,p=0,1,2,\cdots,2^N-1)$$

と加法性を満たすことをいう。

任意の Walsh Series（これは必ずしも Walsh-Fourier Series とは限らない、係数 c_n は全く自由に決めてよい）とすると、この Walsh Series から唯一の Quasi-measure m が次の式で決まる。

$$m(I_N^p)=\frac{1}{2^N}\sum_{k=0}^{2^N-1} c_k w_k(t)\quad \text{ここで } t\in I_N^p$$

さらに逆に m が上の関係式を満たす Quasi-Measure ならば、Fourier Series に当たる、拡張された Walsh-Fouerier Series が唯一存在する。すなわち 1 つの Quasi-measure に 1 つの Walsh Series（実は Walsh-Fourier Series） が対応する 1 対 1 対応になっている。このとき Quasi-Measure m の Walsh-Fourier 係数は形式的に $c_n=\int_{I_0^0} w_n(t)m(dt)$ と書ける。

<u>Walsh-Fourier Transform (Walsh-Fourier 変換)</u>： 今回のケースには直接関係は無いが、I_0^0 上の Quasi-Measure を I_0^∞ にまで広げて考えるときに、Fourier 変換に当たる概念が必要になる。この場合も I_0^∞ 上の Quasi-Measure の Walsh-Fourier Transform が同じ I_0^∞ 上の Quasi-Measure に 1 対 1 に対応することが分かっている。