原始関数による不定積分の拡張

川　敏治

日本大学工学部／玉川大学工学部
(E-mail: toshiharu.kawasaki@nifty.ne.jp)

関数 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 及び点 $c\in[a,b]$ に対して、$F(x)=\displaystyle\int_c^x f(t)dt$ によって定義される関数 F を f の不定積分という。一方、$G'(x)=f(x)$ a.e. となるような関数 G を f の（拡張された）原始関数と呼ぶことにする。

良く知られているように、関数 f が連続ならば、至る処で $F'=f$ が成り立つ（解析学の基本定理）ので、定数の差を無視すれば $G=F$ が成り立つ。

では、f が必ずしも連続でない場合はどうであろうか？

f を Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 積分可能な関数とする。f は必ずしも連続とは限らない。この場合でも殆ど同じで、$F'=f$ a.e. が成り立つので、定数の差を無視すれば $G=F$ が成り立つ。

では、Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 積分不可能な関数の場合はどうであろうか？

例えば、$f(x)=\dfrac{1}{x}$ の場合を考える。f は、点 0 を含む区間では Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 積分不可能な関数である。従って、不定積分 F は存在しない。然し乍ら、原始関数の方は存在して $G(x)=\log|x|$ である。このことは、Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 積分は更に拡張することが可能なことを示唆する。講演者は、この問題に関し、Cauchy の主値の考えを取り込んだ Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 主値積分を提案してきた。

しかし、別の関数 $f(x)=\sec^2 x$ を例に取ると、点 $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$ を含む区間では Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 積分不可能ではあるが、原始関数 $G(x)=\tan x$ は存在する。しかし、Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil 主値積分ではない。

一般に、原始関数は無数に存在する。原始関数に連続性及び必要な条件を仮定すれば定数の差を無視すれば一意に定まる。しかし、上記の例のように、$f(x)=\dfrac{1}{x}$ や $f(x)=\sec^2 x$ に関しては、連続な原始関数とはならない。

本講演では、このような関数も積分可能とするアイディアについて述べたい。

References

[1] B. Bongiorno, *Un nuovo integrale per il problema della primitive*, Le Matematiche **51** (1996), 299–313.
[2] ———, *On the C-integral*, AMS Special Session on Nonabsolute Integration (University of Toronto, Toronto, September, 2000).
[3] B. Bongiorno, L. Di Piazza, and D. Preiss, *A constructive minimal integral which includes Lebesgue integrable functions and derivatives*, Journal of the London Mathematical Society **62** (2000), 117–126.
[4] D. Bongiorno, *On the problem of nearly derivatives*, Scientiae Mathematicae Japonicae **e-2004** (2004), 275–287.
[5] ———, *Riemann-type definition of improper integrals*, Czechoslovak Mathematical Journal **54** (2004), 717–725.
[6] A. M. Bruckner, R. J. Freissner, and J. Foran, *The minimal integral which includes Lebesgue integrable functions and derivatives*, Coll. Math. **50** (1986), 289–293.
[7] R. A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, American Mathematical Society, Providence, 1994.
[8] R. Henstock, *The general theory of integration*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
[9] T. Kawasaki, *Criteria for the $\tilde{C}$-integral*, Scientiae Mathematicae Japonicae **e-2015** (2015), 11 pages.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 26A36; Secondary 26A39.
Key words and phrases. Henstock-Kurzweil integral, Primitive, Indefinite integral.

[10] ______, *Some integrals between the Lebesgue integral and the Denjoy integral*, Scientiae Mathematicae Japonicae **e-2016** (2016), 25 pages.
[11] T. Kawasaki and I. Suzuki, *Criteria for the C-integral*, Scientiae Mathematicae Japonicae **e-2015** (2015), 10 pages.
[12] 久保田陽人, 積分論, 槙書店, 東京, 1977.
[13] S. Nakanishi (formerly S. Enomoto), *Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions, I*, Osaka Mathematical Journal **7** (1955), 59–102.
[14] ______, *Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions, II*, Osaka Mathematical Journal **7** (1955), 157–178.
[15] S. Nakanishi, *The Denjoy integrals defined as the completion of simple functions*, Mathematica Japonica **37** (1992), 89–101.
[16] ______, *A new definition of the Denjoy's special integral by the method of successive approximation*, Mathematica Japonica **41** (1995), 217–230.
[17] W. F. Pfeffer, *The Riemann approach to integration*, Cambridge University Press, Oxford, 1993.
[18] S. Saks, *Theory of the integral*, Warsaw, 1937.
[19] E. Talvila, *The distributional Denjoy integral*, Real Analysis Exchange **33** (2007/2008), 51–82.

弱い正則条件の下での双線形フーリエ乗子作用素の有界性について

大阪大学理学研究科数学専攻　至田直人

双線形フーリエマルチプライヤー作用素の有界性について考える．$m(\xi,\eta) \in L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ に対して，双線形フーリエマルチプライヤー作用素 T_m は以下で定められる：

$$T_m(f,g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} e^{ix\cdot(\xi+\eta)} m(\xi,\eta) \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta) d\xi d\eta$$

Coifman-Meyer [1] において，L を十分大きな自然数とすると，$m \in C^L(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \backslash \{(0,0)\})$ が，

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta m(\xi,\eta)| \lesssim (|\xi|+|\eta|)^{-(|\alpha|+|\beta|)} \quad \left(\alpha,\beta \in \mathbf{N}_+^n,\ |\alpha|+|\beta| \leq L\right) \tag{1}$$

を満たすならば，$1/p+1/q=1/r$ を満たす $1<p,q,r<\infty$ に対して，T_m は $L^p(\mathbf{R}^n) \times L^q(\mathbf{R}^n) \to L^r(\mathbf{R}^n)$ 有界であることが示された．L については，Tomita [6] により，$L=n+1$ までの微分評価があれば有界性が成立することが証明されている．最近では，Grafakos-Nakamura-Nguyen-Sawano [4] において，(1) を満たす m と $1/p+1/q=1/r$ を満たす $0<p,q,r<\infty$ に対して T_m が $H^p(\mathbf{R}^n) \times H^q(\mathbf{R}^n) \to H^r(\mathbf{R}^n)$ 有界であるための必要十分条件が得られている．ここで $H^p(\mathbf{R}^n)$ はハーディ空間を表す．[4] の結果は Coifman-Lions-Meyer-Sennes [2] の拡張となっている．

これらの結果では m に十分な滑らかさを仮定している．今回は T_m の有界性を保証するようなさらに弱い m の条件について考える．このことについてはこれまでにも多くの研究がされてきた．

これらを述べる前に，いくつかの記号を用意する．$F \in \mathcal{S}'$ に対して

$$(I-\Delta_\xi)^{s_1/2}(I-\Delta_\eta)^{s_2/2}F(\xi,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i(x\cdot\xi+y\cdot\eta)}(1+|x|^2)^{s_1/2}(1+|y|^2)^{s_2/2}\widehat{F}(x,y)dxdy$$

と定める．更に $m(\xi,\eta) \in L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ に対して，$m_j(\xi,\eta) = m(2^j\xi, 2^j\eta)\Psi(\xi,\eta)$ と置き，$\Psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ は

$$\operatorname{supp}\Psi \subset \{\xi \in \mathbf{R}^n; 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}, \qquad \sum_{j\in\mathbf{Z}} \Psi(\xi/2^j, \eta/2^j) = 1 \ ((\xi,\eta) \neq (0,0))$$

を満たすものとする．

まず，(1) よりも弱い条件の下で有界性が成り立つものとして以下が挙げられる．

定理 1 ([6])．$1<p,q,r<\infty$ は $1/p+1/q=1/r$ を満たすものとする．$s>n$ ならば

$$\|T_m\|_{L^p\times L^q \to L^r} \lesssim \sup_{j\in\mathbf{Z}} \|m_j\|_{W^s(\mathbf{R}^{2n})} \tag{2}$$

が成り立つ．ここで $\|\cdot\|_{W^s(\mathbf{R}^{2n})}$ は $\|F\|_{W^s(\mathbf{R}^{2n})} = \left\|(I-\Delta_\xi-\Delta_\eta)^{s/2}F(\xi,\eta)\right\|_{L^2_{\xi,\eta}}$ で定まるノルムである．

$r \leq 1$ の場合は Grafakos-Si [3] で扱われている．ここで，(1) を満たす m は $\sup_{j\in\mathbf{Z}}\|m_j\|_{W^s(\mathbf{R}^{2n})} < \infty$ を満たすことに注意する．

次に $W^s(\mathbf{R}^{2n})$ を積型のソボレフ空間に置き換えたものについて以下の結果がある．

定理 2 ([5])．$0<p,q,r\leq\infty$ は $1/p+1/q=1/r$ を満たすものとする．$s_1 > \max\{n/2, n/p-n/2\}$，$s_2 > \max\{n/2, n/q-n/2\}$，$s_1+s_2 > n/p+n/q-n/2$ ならば

$$\|T_m\|_{H^p\times H^q \to L^r} \lesssim \sup_{j\in\mathbf{Z}} \|m_j\|_{W^{(s_1,s_2)}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)} \tag{3}$$

が成立する．ここで $\|\cdot\|_{W^{(s_1,s_2)}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)}$ は $\|F\|_{W^{(s_1,s_2)}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)}=\left\|(I-\Delta_\xi)^{s_1/2}(I-\Delta_\eta)^{s_2/2}F(\xi,\eta)\right\|_{L^2_{\xi,\eta}}$ で定まるノルムである．

定理 2 は $W^{s_1+s_2}(\mathbf{R}^{2n}) \hookrightarrow W^{(s_1,s_2)}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$ という埋め込みの関係があることから，定理 1 を含むものとなっていると考えることが出来る．

我々は部分的にこれらの結果を改良することができた．以下が主結果である．

定理 3. $s>n/2$，$\varepsilon>0$ とする．このとき，

$$\|T_m\|_{L^2\times L^\infty\to L^2} \lesssim \sup_{j\in\mathbf{Z}} \left\| \left\| (I-\Delta_\xi)^{\varepsilon/2}(I-\Delta_\eta)^{s/2} m_j(\xi,\eta) \right\|_{L^2_\eta} \right\|_{L^\infty_\xi} \tag{4}$$

が成り立つ．

右辺のノルムについていくつかの性質を述べておく．まず，十分小さな $\varepsilon>0$ に対して，ソボレフの埋め込み定理により (4) の右辺のノルムは (3) の右辺のノルムよりも小さいことがわかる．つまり定理 3 は定理 2 の $p=2$，$q=\infty$ の場合の改良となっている．

次に，(3) の右辺に現れた積型のソボレフノルムでは利用できなかった，双対性の議論を適用することができる．このことを用いて以下の定理を得ることも出来た．

定理 4. $s>n/2$，$\varepsilon>0$ とする．このとき，

$$\|T_m\|_{L^2\times L^2\to L^1} \lesssim \min\left\{ \sup_{j\in\mathbf{Z}} \left\| \left\| (I-\Delta_\xi)^{\varepsilon/2}(I-\Delta_\eta)^{s/2} m_j(\xi,\eta) \right\|_{L^2_\eta} \right\|_{L^\infty_\xi},\ \sup_{j\in\mathbf{Z}} \left\| \left\| (I-\Delta_\eta)^{\varepsilon/2}(I-\Delta_\xi)^{s/2} m_j(\xi,\eta) \right\|_{L^2_\xi} \right\|_{L^\infty_\eta} \right\}$$

が成り立つ．

さらに今回は m に消失条件を仮定すれば，それぞれの結果の $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ を $BMO(\mathbf{R}^n)$ に，$L^1(\mathbf{R}^n)$ を $H^1(\mathbf{R}^n)$ に置き換えることもできた．ここで $BMO(\mathbf{R}^n)$ は有界平均振動関数全体の成す空間とする．これはマルチプライヤーの滑らかさの観点からみれば，[2, 4] の部分的な改良となっている．

参考文献

[1] R.R. Coifman, Y. Meyer, Au delá des opérateurs pseudo-differéntiels, Astérisque **57** (1978), 1-185.

[2] R.R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes, Compensated compactness and Hardy spaces, J. Math. Pures Appl. **72** (1993), 247 - 286

[3] L. Grafakos, Z. Si, The Hörmander multiplier theorem for multilinear operators, J. Reine Angew. Math. **668** (2012), 133 -147.

[4] L. Grafakos, S. Nakamura, H.V. Nguyen, Y. Sawano, Multiplier conditions for boundness into Hardy spaces, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), to appear.

[5] A. Miyachi, N. Tomita, Minimal smoothness conditions for bilinear Fourier multipliers, Rev. Mat. Iberoam. **29** (2013), 495-530.

[6] N. Tomita, A Hörmander type multiplier theorem for multilinear operators. J. Funct. Anal. **259** (2010), 2028-2044.

Local Muckenhoupt class for variable exponents

Toru Nogayama *(Tokyo Metropolitan University)
Yoshihiro Sawano (Tokyo Metropolitan University)

In this talk, we define $A^{\rm loc}_{p(\cdot)}$ and show that the weighted inequality for local Hardy–Littlewood maximal operator on the Lebesgue spaces with variable exponent.

We mix the notions considered in [1, 5] to define the local Muckenhoupt class as follows:

Definition 0.1. Given an exponent $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ and a weight w, we say that $w \in A^{\rm loc}_{p(\cdot)}$ if

$$[w]_{A^{\rm loc}_{p(\cdot)}} \equiv \sup_{|Q|\le 1} |Q|^{-1} \|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \|\chi_Q\|_{L^{p'(\cdot)}(\sigma)} < \infty,$$

where $\sigma \equiv w^{-\frac{1}{p(\cdot)-1}}$ and the supremum is taken over all cubes $Q \subset \mathbb{R}^n$.

This work will extend the theory of Rychkov, who developed the theory of $A^{\rm loc}_p$ weights. Due to the setting of variable exponents, a new method of extension of weights will be needed; the extension method is different from the one by Rychkov.

References

[1] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, C. J. Neugebaucer, *Weighted norm inequalities for the maximal operator on variable Lebesgue spaces*, J. Math. Anal. Appl. **394** (2012), 744–760.

[2] P. Hästö, Local-to-global results in variable exponent spaces, Math. Res. Letters **16** (2009), no. 2, 263–278.

[3] T. Hytönen and C. Perez, Sharp weighted bounds involving A_∞, Anal. PDE **6** (2013), no. 4, 777–818.

[4] E. Nakai, Y. Sawano, *Hardy spaces with variable exponents and generalized Campanato spaces*, J. Funct. Anal. **262** (2012), no. 9, 3665–3748.

[5] V. S. Rychkov, *Littlewood–Paley theory and function spaces with $A^{\rm loc}_p$ weights,* Math. Nachr. **224** (2001), 145–180.

[6] H. Tanaka, Morrey spaces and fractional operators, J. Aust. Math. Soc. **88** (2010), no. 2, 247–259.

[7] L. Tang, *Weighted local Hardy spaces and their applications*, Illinois J. Math. **56** (2012), no. 2, 453–495.

*toru.nogayama@gmail.com,Tokyo Metropolitan University,Department of Mathematics,1-1 Minami-Ohsawa, Hachioji, 192-0397, Tokyo, Japan

Commutators on Orlicz-Morrey spaces

石 明磊（茨城大学大学院理工学研究科）
新井 龍太郎（茨城大学大学院理工学研究科）
中井 英一（茨城大学大学院理工学研究科）

For a Young function $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$, a growth function $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ and a ball B of radius r, let

$$\|f\|_{\Phi,\varphi,B} = \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|B|\varphi(r)}\int_B \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx \le 1\right\},$$

$$\|f\|_{\Phi,\varphi,B,\mathrm{weak}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{t\in(0,\infty)} \frac{\Phi(t)\, m(B, f/\lambda, t)}{|B|\varphi(r)} \le 1\right\},$$

where $m(B,f,t) = |\{x \in B : |f(x)| > t\}|$.

Definition 0.1 (Orlicz-Morrey space)**.** Let

$$L^{(\Phi,\varphi)}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{L^{(\Phi,\varphi)}} < \infty\right\},$$

$$\|f\|_{L^{(\Phi,\varphi)}} = \sup_B \|f\|_{\Phi,\varphi,B},$$

$$\mathrm{w}L^{(\Phi,\varphi)}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathrm{w}L^{(\Phi,\varphi)}} < +\infty\right\},$$

$$\|f\|_{\mathrm{w}L^{(\Phi,\varphi)}} = \sup_B \|f\|_{\Phi,\varphi,B,\mathrm{weak}}.$$

We discuss the boundedness of commutators $[b,T]$ and $[b,I_\rho]$ on Orlicz-Morrey spaces, where T is a singular integral operator, I_ρ is a generalized fractional integral operator and b is a function in generalized Campanato spaces.