Hilbert 空間における非拡大写像と擬非拡大写像の不動点近似について

千葉大学・社会科学研究院 青山耕治
Koji Aoyama
Graduate School of Social Sciences,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47J25, 47J20, 47H09.
Keywords and phrases. 不動点, 非拡大写像, 擬非拡大写像, 近似アルゴリズム.

概要

本稿では, 文献 [8] で得られた結果を解説する。

1 はじめに

本稿では, 次の定理の別証明および一般化を扱う。

定理 1.1 (Falset et al. [22, Theorem 3]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $T\colon C \to C$ を非拡大写像, $S\colon C \to C$ を強擬非拡大写像, $u \in C$, $\{\alpha_n\}$ および $\{\beta_n\}$ を $[0,1]$ の数列, $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)\left[\beta_n T x_n + (1-\beta_n) S x_n\right] \tag{1.1}$$

で定義される C の点列とする。さらに, $\mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(S)$ は空ではなく, $I - S$ は 0 で demiclosed であるとし, $\alpha_n \to 0$ および $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を仮定する。このとき, 以下が成り立つ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\beta_n) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ ならば, $\{x_n\}$ は $P_{\mathrm{F}(T)}(u)$ へ強収束する。
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_n > 0$, $\beta_n/\alpha_n \to 0$ ならば, $\{x_n\}$ は $P_{\mathrm{F}(S)}(u)$ へ強収束する。
(3) $\liminf_n \beta_n(1-\beta_n) > 0$, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_n > 0$ ならば, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ へ強収束する。ここで, $F = \mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(S)$ である。

註 1. 定理 1.1 の (2) および (3) における “すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_n > 0$” という仮定は, [22, Theorem 3] に明示されていない。しかし, この仮定はそれら証明の中で使われている。

本稿の構成は次の通りである。次節では, 以降の節で必要となる定義や記号を述べる。第 3 節では, よく知られた結果を使うと, 定理 1.1 (1) が簡単に示せることを説明する。第 4 節では, 定理 1.1 (2) を少し一般化した定理 4.1 を示す。最後の第 5 節では, 二つの擬非拡大写像の共通不動点に関する強収束定理 (定理 5.1) を示す。それは, 定理 1.1 (3) の一般化である。

2 準備

本稿では, H を実 Hilbert 空間, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を H の内積, $\|\cdot\|$ を H のノルム, C を H の空でない閉凸部分集合, I を H 上の恒等写像, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする。H の点列 $\{x_n\}$ が x に強収束するとき $x_n \to x$, 弱収束するとき $x_n \rightharpoonup x$ と表す。

T を C から H への写像とする。T の不動点の集合を $\mathrm{F}(T)$ と表す。つまり, $\mathrm{F}(T) = \{z \in C \colon z = Tz\}$ である。T が擬非拡大 (quasinonexpansive) であるとは, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$, かつ, すべての $x \in C$ と $p \in \mathrm{F}(T)$ に対して $\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$ が成り立つときをいう。T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。T が強擬非拡大 (strongly quasinonexpansive) であるとは [6, 8, 12–14, 16–19, 24], T が擬非拡大で, かつ, 以下が成り立つときをいう。

> $\{x_n\}$ が C の有界点列, $p \in \mathrm{F}(T)$, $\|x_n - p\| - \|Tx_n - p\| \to 0$ ならば, $Tx_n - x_n \to 0$ である。

T が 0 で demiclosed であるとは, $\{x_n\}$ が C の点列で $x_n \rightharpoonup p$ および $Tx_n \to 0$ のとき, $Tp = 0$ が成り立つときをいう。

擬非拡大写像および非拡大写像について, 次のことが知られている。

- 擬非拡大写像の不動点集合は, 閉凸集合である [21, Theorem 1]。
- 写像 $T \colon C \to H$ が不動点をもつとき, T が強擬非拡大であることと, T が文献 [12, 13, 16, 17] の意味で (sr) 型であることは同値である。

H から C の上への距離射影 (metric projection) を P_C と表す。つまり, $x \in H$ のとき, $P_C(x)$ は

$$\|x - P_C(x)\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$$

を満たす唯一の C の点である。距離射影について詳しくは, [25] を参照するとよい。

$\{T_n\}$ を C から H への写像の列, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(T_n)$ とし, F は空ではないと仮定する。このとき, $\{T_n\}$ が強擬非拡大型 (strongly quasinonexpansive type) であるとは, 各 T_n

が擬非拡大で, かつ, 次の条件が成り立つときをいう [3,7,12–14,17]。

> $\{x_n\}$ が C の有界点列, $p \in F$, $\|x_n - p\| - \|T_n x_n - p\| \to 0$ ならば, $T_n x_n - x_n \to 0$ である。

$z \in C$ が $\{T_n\}$ の漸近的不動点 (asymptotic fixed point) であるとは, C の点列 $\{x_n\}$ と $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在し, $T_n x_n - x_n \to 0$ および $x_{n_i} \rightharpoonup z$ が成り立つときをいう [3]。$\{T_n\}$ の漸近的不動点の集合を $\hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ と表す。明らかに, $F \subset \hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ が成り立つ。

定義からすぐに次の補助定理が得られる。

補助定理 2.1. $T\colon C \to H$ を不動点をもつ写像とし, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n = T$ とする。このとき, $I - T$ が 0 で demiclosed ならば, $\hat{\mathrm{F}}(\{T_n\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(T_n)$ である。さらに, T が強擬非拡大ならば, $\{T_n\}$ は強擬非拡大型である。

さらに, [14, Remark 2.5] および [3, Proposition 6] より, 次の補助定理が得られる。

補助定理 2.2. $\{T_n\}$ を C から H への写像の列, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(T_n)$ とし, F は空ではないと仮定する。このとき, 以下が成り立つ。

- $\{T_n\}$ が強非拡大型であることと, $\{T_n\}$ が [3, 12, 13, 17] の意味で strongly relatively nonexpansive sequence であることは同値である。
- $F = \hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ であることと, $\{T_n\}$ が [1–5, 9–15, 17] の意味で条件 (Z) を満たすことは同値である。
- $z \in \hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ ならば, C の有界点列 $\{x_n\}$ と $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在し, $T_n x_n - x_n \to 0$ および $x_{n_i} \rightharpoonup z$ が成り立つ。

3 定理 1.1 (1) の証明

この節では, 次のよく知られた結果を使って定理 1.1 (1) を証明する。

定理 3.1 ([26, Theorem 2] および [20, Theorem 3.2])**.** H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $T\colon C \to C$ を非拡大写像, $u \in C$, $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の数列, $\{y_n\}$ を $y_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$y_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) T y_n \tag{3.1}$$

で定義される C の点列とする。さらに, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$, $\alpha_n \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ を仮定する。このとき, $\{y_n\}$ は $P_{\mathrm{F}(T)}(u)$ へ強収束する。

次の補助定理は, 定理 3.1 と定理 1.1 (1) をつなげる役割をする。証明は省略する。

補助定理 3.2 ([8, Lemma 3.2])**.** H, C, T および u を定理 3.1 と同じとし, $\{\alpha_n\}$ および $\{\beta_n\}$ を $[0,1]$ の数列, $\{z_n\}$ を C の有界点列, $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)\left[\beta_n T x_n + (1-\beta_n) z_n\right]$$

で定義される C の点列, $\{y_n\}$ を $y_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (3.1) で定義される C の点列とする。さらに, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ および $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\beta_n) < 0$ を仮定する。このとき, $x_n - y_n \to 0$ である。

定理 3.1 および補助定理 3.2 を使うと, 定理 1.1 (1) を次のように示すことができる。

定理 1.1 (1) の証明. $v \in \mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(S)$ を固定する。T は非拡大, S は擬非拡大だから,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - v\| &\le \alpha_n \|u - v\| + (1-\alpha_n)[\beta_n \|T x_n - v\| + (1-\beta_n) \|S x_n - v\|] \\ &\le \alpha_n \|u - v\| + (1-\alpha_n) \|x_n - v\| \end{aligned} \tag{3.2}$$

となる。よって, n についての帰納法より, すべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\|S x_{n+1} - v\| \le \|x_{n+1} - v\| \le \max\{\|u - v\|, \|x_1 - v\|\} \tag{3.3}$$

が成り立つことがわかる。ゆえに, $\{S x_n\}$ は有界である。$\{y_n\}$ を $y_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (3.1) で定義される点列とする。このとき, 定理 3.1 より $y_n \to P_{\mathrm{F}(T)}(u)$ であること, 補助定理 3.2 より $x_n - y_n \to 0$ であることがわかる。したがって, $x_n \to P_{\mathrm{F}(T)}(u)$ が示せた。 □

4 定理 1.1 (2) の一般化

この節では, 定理 1.1 (2) の仮定の一つ $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$ を $\beta_n \to 0$ で置き換えた次の定理を示す。

定理 4.1. H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $T\colon C \to C$ を非拡大写像, $S\colon C \to C$ を強擬非拡大写像, $u \in C$, $\{\alpha_n\}$ を $(0,1]$ の数列, $\{\beta_n\}$ を $[0,1]$ の数列, $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (1.1) で定義される C の点列とする。さらに, $\mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(S)$ は空ではなく, $I - S$ は 0 で demiclosed であるとし, $\alpha_n \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\beta_n \to 0$, $\beta_n / \alpha_n \to 0$ を仮定する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_{\mathrm{F}(S)}(u)$ へ強収束する。

次の定理は, [7, Corollary 3.1] および補助定理 2.1 からすぐに得られる。この定理を使うと, 定理 4.1 を簡単に示すことができる。

定理 4.2. H, C, S および $\{\alpha_n\}$ を定理 4.1 と同じとし, $\{u_n\}$ を C の点列, $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n+1} = \alpha_n u_n + (1-\alpha_n)Sx_n$ で定義される C の点列とする。さらに, $u_n \to u$ を仮定する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_{\mathrm{F}(S)}(u)$ へ強収束する。

定理 4.2 を使うと, 次の補助定理が得られる。証明は省略する。

補助定理 4.3 ([8, Lemma 4.3])**.** H, C, S, u, $\{\alpha_n\}$ および $\{\beta_n\}$ を定理 4.1 と同じとし, $\{z_n\}$ を C の有界点列, $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)[\beta_n z_n + (1-\beta_n)Sx_n]$$

で定義される C の点列とする。このとき, $\{x_n\}$ は $P_{\mathrm{F}(S)}(u)$ へ強収束する。

本節の最後に, 補助定理 4.3 を使って, 定理 4.1 が証明する。

定理 4.1 の証明. $v \in \mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(S)$ を固定する。T は非拡大だから, (3.2) と (3.3) より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\|Tx_{n+1} - v\| \le \|x_{n+1} - v\| \le \max\{\|u-v\|, \|x_1 - v\|\}$$

が成り立つ。よって, $\{Tx_n\}$ は有界である。ゆえに, 補助定理 4.3 より, $x_n \to P_{\mathrm{F}(S)}(u)$ が示せた。 $\square$

5 二つの擬非拡大写像に関する強収束定理

この節では, 二つの擬非拡大写像の共通不動点に関する次の定理を示す。

定理 5.1. H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $T\colon C \to C$ を擬非拡大写像, $S\colon C \to C$ を強擬非拡大写像, $u \in C$, $\{\alpha_n\}$ を $(0,1]$ の数列, $\{\beta_n\}$ を $[0,1]$ の数列, $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (1.1) で定義される C の点列とする。さらに, $\mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(S)$ は空ではなく, $I - T$ と $I - S$ は 0 で demiclosed であるとし, $\alpha_n \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\liminf_n \beta_n(1-\beta_n) > 0$ を仮定する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ へ強収束する。ここで, $F = \mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(S)$ である。

註 2. 非拡大写像 T が不動点をもつとき, T は擬非拡大である。さらに, $I-T$ は 0 で demiclosed であることが知られている (例えば, [23])。したがって, 定理 1.1 (3) は定理 5.1 の系である。

次の定理 5.2 と補助定理 5.3 を使うと, 定理 5.1 を簡単に示すことができる。定理 5.2 は, [12, Theorem 3.1] および補助定理 2.2 から導かれる。

定理 5.2. H, C, u および $\{\alpha_n\}$ を定理 5.1 と同じとし, $\{U_n\}$ を C から C への写像の列, $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)U_n x_n$ で定義される C の点列, $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(U_n)$ とする。さらに, K は空ではなく, $\{U_n\}$ は強擬非拡大型であり, $\hat{\mathrm{F}}(\{U_n\}) = K$ を仮定する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_K(u)$ へ強収束する。

次の補助定理の証明は省略する。

補助定理 5.3 ([8, Lemma 5.4])**.** H, C, T, S および $\{\beta_n\}$ を定理 5.1 と同じとし, $n \in \mathbb{N}$ に対して写像 $U_n\colon C \to C$ を $U_n = \beta_n T + (1-\beta_n)S$ で定義する。このとき, 各 U_n は擬非拡大, $\mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(S) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(U_n)$, $\{U_n\}$ は強擬非拡大型, $\hat{\mathrm{F}}(\{U_n\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(U_n)$ である。

最後に, 定理 5.2 および補助定理 5.3 を使って, 定理 5.1 を示そう。

定理 5.1 の証明. $U_n = \beta_n T + (1-\beta_n)S$ とおく。このとき, 補助定理 5.3 より, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(U_n)$ であり, $\{U_n\}$ は強擬非拡大型であり, $\hat{\mathrm{F}}(\{U_n\}) = F$ であることがわかる。よって, 定理 5.2 より結論が得られる。 $\square$

参考文献

[1] K. Aoyama, *An iterative method for a variational inequality problem over the common fixed point set of nonexpansive mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2010, pp. 21–28.

[2] ———, *An iterative method for fixed point problems for sequences of nonexpansive mappings*, Fixed point theory and its applications, 2010, pp. 1–7.

[3] ———, *Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings*, Banach and function spaces III (ISBFS 2009), 2011, pp. 343–350.

[4] ———, *Halpern's iteration for a sequence of quasinonexpansive type mappings*, Nonlinear mathematics for uncertainty and its applications, 2011, pp. 387–394.

[5] ———, *Approximations to solutions of the variational inequality problem for inverse-strongly-monotone mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis -I-, 2013, pp. 1–9.

[6] ———, *Strongly quasinonexpansive mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2016, pp. 19–27.

[7] ———, *Viscosity approximation method for quasinonexpansive mappings with contraction-like mappings*, Nihonkai Math. J. **27** (2016), 168–180.

[8] ———, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings and quasinonexpansive mappings in a Hilbert space* (2017), available at `arXiv:1709.08901[math.FA]`.

[9] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.

[10] ———, *A note on the hybrid steepest descent methods*, Fixed point theory and its applications, 2013, pp. 73–80.

[11] ———, *Viscosity approximation methods with a sequence of contractions*, Cubo **16** (2014), 9–20.

[12] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.

[13] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:95, 13.

[14] ———, *Viscosity approximation process for a sequence of quasinonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:17, 11.

[15] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e1626–e1632.

[16] ———, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2009, pp. 7–26.

[17] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[18] K. Aoyama and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory **8** (2007), 143–160.

[19] K. Aoyama and K. Zembayashi, *Strongly quasinonexpansive mappings, II* (2017), available at `arXiv:1703.02218[math.FA]`.

[20] H. H. Bauschke, *The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 150–159.

[21] W. G. Dotson Jr., *Fixed points of quasi-nonexpansive mappings*, J. Austral. Math. Soc. **13** (1972), 167–170.

[22] J. G. Falset, E. Llorens-Fuster, G. Marino, and A. Rugiano, *On strong convergence of Halpern's method for quasi-nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, Math. Model. Anal. **21** (2016), 63–82.

[23] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[24] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, 1996, pp. 313–318.

[25] W. Takahashi, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.

[26] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. (Basel) **58** (1992), 486–491.