永田良, 田中久稔『経済学教室 3 経済数学』培風館を読んで (9 章から 12 章まで)

2021/03/31 版

これは, 文献 [2] をゼミナールで輪読した際に気になったところをまとめたものです。何かお気づきの点は, 「`aoyama` アットマーク `bm.skr.jp`」までお知らせください。以下, 誤植と思われるところは「A(元)→B(修正案)」と記しています。

9 章 凸関数と同次関数

9.1 凸集合

9.2 凸関数と凹関数

p.175, 下から 1 行目: 「連続であると仮定」は不要. なお, 本書では, 関数の連続性を p.231 で扱う.

定義 9.4 (p.177): 「任意の二つの点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}$ と」→ 「任意の異なる二つの点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}$ と」

9.3 微分可能な凸関数と凹関数

命題 9.3 (p.178) 2 行目: 「任意の任意の $\boldsymbol{x}$,」→「任意の $\boldsymbol{x}$,」

命題 9.3 (p.178) 5 行目: 「, 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x'}$ に対し $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x'}$ であるならば」を挿入

命題 9.5 (p.179): A は 2 次正方行列

命題 9.4 の証明

- 冒頭部分 (p.179) は以下の同値性を認めるという説明
  $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が 2 回微分可能な関数のとき, 「ϕ が凸」⇔ 「$\phi''(x) \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$」
- p.180 の 1 行目: $\varphi(h)$ が凸であることの証明
  $h, h' \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ のとき, $\lambda, 1-\lambda \geq 0$ に注意すると,

$$\begin{aligned}\varphi\bigl((1-\lambda)h + \lambda h'\bigr) &= f\bigl(\boldsymbol{x} + \bigl[(1-\lambda)h + \lambda h'\bigr]\boldsymbol{a}\bigr)\\ &= f\bigl((1-\lambda)(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{a}) + \lambda(\boldsymbol{x} + h'\boldsymbol{a})\bigr)\\ &\leq (1-\lambda)f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{a}) + \lambda f(\boldsymbol{x} + h'\boldsymbol{a})\\ &= (1-\lambda)\varphi(h) + \lambda\varphi(h').\end{aligned}$$

- p.180 の 2 行目: 「$\varphi''(h) \leq 0$」→「$\varphi''(h) \geq 0$」
- p.180 の下から 4 行目あたり: 冒頭の同値性を認めれば, 「f が凸である ⇒ 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a}$ と h について, $\boldsymbol{a'}H_f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} \geq 0$」はよい. しかし, 逆は追加の説明が必要と思われる.

命題 9.7 (p.183) 上から 6 行目: 「, 任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ について」を挿入.

定理 9.9 (p.184) の証明の 1 行目: 「二点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x'}$ について」→「異なる二点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x'}$ について」

9.4 準凸関数と準凹関数

例 9.10 (p.185) の下から 3 行目: 「限らなず」→「限らず」

図 9.7 (p.186): 「, $U_f(a)$」および「上位・」を削除

定義 9.7 の下 (p.187): 「準凸関数の様子」は「準凹関数の様子」かもしれない.

命題 9.12 の証明 (p.188) の 8 行目あたり: 「$\lambda \in [0,1]$ とする.」を挿入

p.188 の中ほど:「$T \circ f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ が凹関数ではない」ことは p.190 に説明がある. 例えば, $\boldsymbol{a} = (1,1)$, $\boldsymbol{b} = (3,3)$ とすると, $T \circ f(\boldsymbol{a}/2 + \boldsymbol{b}/2) = 4 < 5 = (1+9)/2 = T \circ f(\boldsymbol{a})/2 + T \circ f(\boldsymbol{b})/2$.

命題 9.13 とその証明 (p.188, 189)

- 命題 9.13 は, T が減少の場合は成り立たない. つまり,「f が準凸, T が狭義単調減少ならば, $T \circ f$ は準凸」は成り立たない. 例えば, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$, $T(y) = -y$ で定義すると, T は凸, よって準凸, T は狭義単調減少である. しかし, $T \circ f(x) = -x^2$ は準凸ではない.
- 証明 (p.189) の「a が T の値域に属していない場合は $L_{T \circ f}(a)$ は $\mathbb{R}^2$ 全体か空集合である」は成り立たない. 例えば, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を, $f(x,y) = x + y$, $T(s) = \begin{cases} s & (s \le 0); \\ s+2 & (s > 0) \end{cases}$ で定義すると, f は凸, T は狭義単調増加, $1 \notin T(\mathbb{R})$ であるが, $T \circ f(x,y) \le 1 \Leftrightarrow f(x,y) \le 0$ であるから, $\emptyset \ne L_{T \circ f}(1) \subsetneq \mathbb{R}^2$.
- 命題 9.13 の代替として次の命題を示す.

命題 1 (命題 9.13 の書き換え)**.** C を $\mathbb{R}^n$ の凸集合, $f\colon C \to \mathbb{R}$ を準凸関数, $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を単調非減少関数とする. このとき, $T \circ f$ は準凸である.

証明. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'} \in C$, $\lambda \in [0,1]$ とし, $T \circ f(\boldsymbol{x}) \ge T \circ f(\boldsymbol{x'})$ を仮定する. このとき, $T \circ f(\boldsymbol{x}) \ge T \circ f\big((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{x'}\big)$ であることを示せばよい. まず, $f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{x'})$ とする. f は準凸だから, $f(\boldsymbol{x}) \ge f\big((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{x'}\big)$ である. よって, T が単調非減少だから,

$$T \circ f(\boldsymbol{x}) = T\big(f(\boldsymbol{x})\big) \ge T\Big(f\big((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{x'}\big)\Big) = T \circ f\big((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{x'}\big).$$

次に, $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x'})$ とする. f は準凸だから, $f(\boldsymbol{x'}) \ge f\big((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{x'}\big)$ である. よって, T が単調非減少だから,

$$T \circ f(\boldsymbol{x}) \ge T \circ f(\boldsymbol{x'}) = T\big(f(\boldsymbol{x'})\big) \ge T\Big(f\big((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{x'}\big)\Big) = T \circ f\big((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{x'}\big). \qquad \square$$

定義 9.8 (p.189)

- 定義 9.8 に書かれたものを**本書の意味で狭義準凸**, **本書の意味で狭義準凹**と呼び, あとに述べるものと区別する.
- 他の文献, 例えば, 文献 [1, 4] では, 次の定義を採用している. $\mathbb{R}^n$ の凸集合 C と関数 $f\colon C \to \mathbb{R}$ を所与とするとき, $f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{x'})$ および $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{x'}$ を満たす任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'} \in C$ と任意の $\lambda \in (0,1)$ に対して,
  - $f(\boldsymbol{x}) > f\big((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{x'}\big)$ が成り立つとき, f は**狭義準凸**であるといい,
  - $f\big((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{x'}\big) > f(\boldsymbol{x'})$ が成り立つとき, f は**狭義準凹**であるという.

  以下, 単に狭義準凸または狭義準凹と書いた場合は, 上記を意味する.
- 狭義凸 $\Rightarrow$ 狭義準凸 $\Rightarrow$ 準凸である. また, 凸と狭義準凸は独立である (定数関数は凸であるが, 狭義準凸ではない. $f(x) = \log x$ は狭義準凸であるが, 凸ではない). また, 狭義凸 $\Rightarrow$ 凸 $\Rightarrow$ 準凸である.
- 狭義凸 $\Rightarrow$ 凸 $\Rightarrow$ 本書の意味で狭義準凸である. しかし, 本書の意味で狭義準凸 $\not\Rightarrow$ 準凸である. 例えば, $C = [0,1]$, $f(1/2) = 1$, $x \ne 1/2$ のとき $f(x) = 0$ で定義される関数 $f\colon C \to \mathbb{R}$ は本書の意味で狭義準凸であるが, 準凸ではない. 実際, $\{x \in [0,1]\colon f(x) \le 0\} = [0,1/2) \cup (1/2,1]$ なので準凸ではないことがわかる. 次に, $f(x) > f(y)$, $\lambda \in (0,1)$ とする. f の定義より, $x = 1/2$, $y \ne 1/2$ であるから, $(1-\lambda)x + \lambda y \ne 1/2$. よって, $f(x) = f(1/2) = 1 > 0 = f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big)$. このことから, **p.190 上部の包含関係は修正が必要**と思われる.

- 狭義準凸 ⇒ 本書の意味で狭義準凸である．しかし, その逆は成り立たない．例えば, 定数関数は本書の意味で狭義準凸であるが, 狭義準凸ではない．

定義 9.9 (p.191)

- 初版 (2012 年 2 月) では, $f(\boldsymbol{x})$ と $f(\boldsymbol{x'})$ の間の不等号を逆にする (2 個所)．ただし, この誤植は初版 2 刷あたりで修正されているようだ．
- 3 行目の「すべての要素について... 意味している (定義 1.2)」は誤植と思 われる．

p.191 の下から 2 行目: 「$U_f(a)$ の狭義凸性」→「f の狭義凸性」

p.192 から p.196 (9.6 の終わり) まで, 2 階連続微分可能な 2 変数関数 f に対して $\bar{G}_f(x_1, x_2)$ を, p.192 の式 (9.12) で定義する． したがって,

$$\boxed{\left|\bar{G}_f\right| = 2f_1f_2f_{12} - (f_1)^2f_{22} - (f_2)^2f_{11}}$$

である．ここでは, 関数の引数を省略している．以下でも省略することがある．

定理 9.15 (p.192)

- 後半の「単調増加かつ本書の意味で準凸ならば $\left|\bar{G}_f\right| > 0$」は**成り立たない**ようだ．例えば, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ のとき,
  - $x_1 < y_1$, $x_2 \le y_2 \Rightarrow f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 < y_1 + y_2 = f(y_1, y_2)$ だから, 本書の意味で f は単調増加と思われる．
  - $f(x_1, x_2) > f(y_1, y_2)$, $\lambda \in (0, 1)$ とすると, $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$ だから,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \\ &> (1-\lambda)(x_1 + x_2) + \lambda(y_1 + y_2) = (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1 + (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2 \\ &= f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1, (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2\big) = f\big((1-\lambda)(x_1, x_2) + \lambda(y_1, y_2)\big). \end{aligned}$$

    よって, 本書の意味で狭義準凸である[*1]．
  - 一方, $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 1$, $f_{11}(x_1, x_2) = f_{12}(x_1, x_2) = f_{22}(x_1, x_2) = 0$ だから, $\left|\bar{G}_f\right| = 0$.
- 後半と似た次の命題は成り立つようだ．

  f は 2 回連続微分可能, f は狭義準凸, $x_1 \le x'_1$, $x_2 \le x'_2 \Rightarrow f(x_1, x_2) \le f(x'_1, x'_2)$, $\big(f_1(a, b), f_2(a, b)\big) \neq (0, 0)$ ならば, $\left|\bar{G}_f(a, b)\right| > 0$.

定理 9.16 (p.194)

- 狭義準凸などを使わず, $\left|\bar{G}_f\right|$ の符号に関する条件だけで結論を書くことができる．
- 制約付き最大化問題のとき: $\mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 - c)$ とおき, $\nabla f(x^*) = \lambda^*(a_1, a_2)$, $\lambda^* \neq 0$ とする． このとき, p.193 の説明より, $\left|\bar{H}_{\mathcal{L}}(\lambda^*, x_1^*, x_2^*)\right| = \dfrac{1}{(\lambda^*)^2}\left|\bar{G}_f(x_1^*, x_2^*)\right|$. よって, $\left|\bar{G}_f(x_1^*, x_2^*)\right| > 0$ ならば, 二階の条件 (定理 8.4, p.169) が満たされる．
- 制約付き最小化問題のとき: $\mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 - \lambda[f(x_1, x_2) - c]$ とおき, $(a_1, a_2) = \lambda^*\nabla f(x_1^*, x_2^*)$, $\lambda^* > 0$ とする[*2]．このとき, p.193 の説明より, $\left|\bar{H}_{\mathcal{L}}(\lambda^*, x_1^*, x_2^*)\right| = -\lambda^*\left|\bar{G}_f(x_1^*, x_2^*)\right|$ であり, よって, $\left|\bar{G}_f(x_1^*, x_2^*)\right| > 0$ ならば, 二階の条件 (定理 8.4, p.169) が満たされる．

例 9.17 (p.194) $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ のとき, $\left|\bar{G}_h(x_1, x_2)\right| = \dfrac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{x_1^2x_2^2} > 0$. また, $T'(u) = 1/u$ だから, 下の補題 2 より, 任意の $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ に対して, $\left|\bar{G}_f(x_1, x_2)\right| > 0$.

[*1] f は狭義準凸ではない．実際, $f(1, -1) = f(-1, 1) = 0$, $f\big((1, -1)/2 + (-1, 1)/2\big) = f(0, 0) = 0$.

[*2] p.193 下から 1 行目に「f の単調性より $f_1^* > 0$」と書いてあるが, これは成り立たないと思われる．1 変数関数 $f(x) = x^3$ は狭義単調増加だが, $f'(0) = 0$. そこで, $\lambda^* > 0$ を仮定した．

例 9.18 (p.194) $\alpha>0$, $\beta>0$, $0<\rho<1$, $x_1>0$, $x_2>0$ のとき, $\left|\bar{G}_h(x_1,x_2)\right|>0$. また, $T'(u)=\rho u^{\rho-1}$ だから, 下の補題 2 より, 任意の $x_1>0$, $x_2>0$ に対して, $\left|\bar{G}_f(x_1,x_2)\right|>0$. なお, p.194 の下から 1 行目:「非負象限 $\mathbb{R}^2_+$」→「$\mathbb{R}^2_{++}$」

補題 2. f を 2 回連続微分可能な 2 変数関数, T を 2 回微分可能な 1 変数関数とし, $\phi=T\circ f$ とおく. このとき, $\left|\bar{G}_\phi\right|=\left|[T'\circ f]^3\bar{G}_f\right|$.

証明. 連鎖公式より,

$$\begin{aligned}\bar{G}_\phi &= 2\phi_1\phi_2\phi_{12}-(\phi_1)^2\phi_{22}-(\phi_2)^2\phi_{11}\\ &= 2T'(f)f_1\cdot T'(f)f_2[T''(f)f_1f_2+T'(f)f_{12}]\\ &\quad -[T'(f)f_1]^2[T''(f)(f_2)^2+T'(f)f_{22}]-[T'(f)f_2]^2[T''(f)(f_1)^2+T'(f)f_{11}]\\ &= [T'\circ f]^3[2f_1f_2f_{12}-(f_1)^2f_{22}-(f_2)^2f_{11}]=[T'\circ f]^3\bar{G}_f.\end{aligned}$$

□

9.5 同次性

定義 9.10 (p.195)

- 同次関数の定義では, 定義域を錐にした方がよいと思われる.
- $C\subset\mathbb{R}^n$ が錐 (cone) であるとは,「$x\in C$, $\alpha>0\Rightarrow\alpha x\in C$」が成り立つときをいう.
- [**定義 9.10 の書き換え**] C を $\mathbb{R}^n$ の空でない錐とし, k を整数とする. このとき, 関数 $f\colon C\to\mathbb{R}$ が k 次同次であるとは, すべての $x\in C$, $\alpha>0$ に対して $f(\alpha x)=\alpha^k f(x)$ が成り立つときをいう.

例 9.19 (p.195)

- $f(x_1,x_2)=x_1/x_2$ の定義域は, $C=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\colon x_2\neq 0\}$ と考えればよい. この C は $\mathbb{R}^2$ の錐である. 実際, $(x_1,x_2)\in C$, $\alpha>0$ のとき, $\alpha x_2\neq 0$ だから, $\alpha(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2)\in C$.
- $f(x_1,x_2)=ax_1+bx_2$ の定義域は, $C=\mathbb{R}^2$ とすればよい.
- $f(x_1,x_2)=x_1^\alpha x_2^\beta$ $(\alpha+\beta=1)$ の定義域は, $C=\mathbb{R}^2_+$ または $\mathbb{R}^2_{++}$ とすればよい.

定理 9.20 (p.196)

- f の定義域を, $\mathbb{R}^n$ の錐で開集合としておいた方がよい.
- 証明に $\log f(t\boldsymbol{x})$ が出てくるので, $f(x)>0$ を仮定しておかねばならない.
- 定理 9.20 を次のように書き換える.

定理 3 (定理 9.20 の書き換え)**.** C を $\mathbb{R}^n$ の空でない錐, k を整数とし, C は $\mathbb{R}^n$ の開集合で, 関数 $f\colon C\to\mathbb{R}$ は微分可能とする[*3]. このとき, f が k 次同次である $\Leftrightarrow kf(x)=\sum_i x_iD_if(x)$, $\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in C$.

証明. $x=(x_1,\dots,x_n)\in C$ を固定する. まず, $\Rightarrow$ を示す. 関数 $\phi\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を, $t>0$ に対して $\phi(t)=f(tx)$ で定義する. f は k 次同次だから, $\phi(t)=f(tx)=t^kf(x)$ である. f が微分可能であるから, ϕ は, $t>0$ で微分可能で, $\phi'(t)=\sum_i D_if(tx)x_i=kt^{k-1}f(x)$. よって, $\phi'(1)=\sum_i D_if(x)x_i=kf(x)$. 次に, $\Leftarrow$ を示す. 仮定より, 任意の $t>0$ に対して $tx\in C$ だから,

$$kf(tx)=\sum_i tx_iD_if(tx)\quad(\forall t>0)$$

が成り立つ. 関数 $\psi\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を, $t>0$ に対して $\psi(t)=t^{-k}f(tx)$ で定義する. f が微分可能であるか

[*3] 本書では, 2 変数関数の微分可能性を扱っていない.

ら, ψ は微分可能であり, 任意の $t > 0$ に対して,

$$\psi'(t) = -kt^{-k-1}f(tx) + t^{-k}\sum_i D_i f(tx)x_i = t^{-k-1}\bigl(-kf(tx) + \sum_i tx_i D_i f(tx)\bigr) = 0$$

となる. つまり, ψ は定数関数で, $\psi(1) = f(x)$ だから, 任意の $t > 0$ に対して, $\psi(t) = f(x) = t^{-k}f(tk) \Leftrightarrow t^k f(x) = f(tx)$ が成り立つ. □

9.6 経済学への応用: 1 次同次生産関数の性質

定理 9.24 (p.198)

- $f(\ell, k)$ の微分可能性, 費用最小化問題が最適解をもつための条件などを仮定する.
- 最後の「係数 $c(w, r)$ は... と呼ぶこともある.」は, 定理 9.24 の (四角の) 外に出す.
- 証明の「これを解いて (p.199)」の部分が読めない. 次の例 9.25 のように f が具体的に与えられていれば, それが可能だが.

例 9.25 (p.199–201)

- 3 行目 (p.199): 「$2\log y - \log \ell - \log l = 0$」→「$2\log y - \log \ell - \log k = 0$」
- p.200 真ん中あたり: 「偶然に $y = 2\sqrt{wr}$」→「偶然に $p = 2\sqrt{wr}$」
- 式 (9.19): 「任意」→「非負」
- p.200, 下から 9 行目: 「$D(p) = D/p$」→「$D(p) = \delta/p$」
  このように修正しておくと, この後の説明と合う. そして, 下から 1 行目も次のように変更する.
  「$y^e = D/p^e = \dfrac{D}{2\sqrt{rw}}$」→「$y^e = \delta/p^e = \dfrac{\delta}{2\sqrt{rw}}$」
- p.200, 下から 4 行目の「均衡価格となりうるのは結局のところ平均費用 $2\sqrt{wr}$ なのである」について:
  費用関数が $C(y, w, r) = c(w, r)y$ と表され, この財の需要関数が $D\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ が与えられているとする. このとき, 均衡価格 $p^e = c(w, r) = C(y, w, r)/y$ である.
  実際, 利潤は, $\pi(y, w, r) = py - C(y, w, r) = \bigl(p - c(w, r)\bigr)y$ となるので, p.200 の解説と同様に考えると次のことがわかる.
  1. $p > c(w, r)$ のとき, π の最大値はない. よって, 最適生産量 y^* は存在しない.
  2. $p = c(w, r)$ のとき, π は常に 0. よって, 最適生産量 y^* は任意の非負の数.
  3. $p < c(w, r)$ のとき, $y = 0$ のとき, π は最大値 0. よって, 最適生産量 $y^* = 0$.

  つまり, 最適供給量 y^* を p の関数 (ただし, $(0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への多価写像) として表すと,

$$y^*(p) = \begin{cases} \emptyset, & p > c(w, r); \\ [0, \infty), & p = c(w, r); \\ 0, & 0 < p < c(w, r) \end{cases}$$

  となる. $p = c(w, r) \Leftrightarrow y^*(p) \in D(p)$ だから, $p^e = c(w, r) = C(y, w, r)/y$ が得られる.
- p.201: 箇条書きの一つ目は, 6.4 節で示した内容. 二つ目の「費用最小化による方法の方が便利である」は, p.200 のように y^e が求められるからか?

例題 9.1 (p.202, 下から 2 行目) の「均衡価格は平均費用に等しいから」について: 上記のように, $C(y, w, r) = c(w, r)y$ のときは, $p^e = c(w, r) = C(y, w, r)/y$ である.

例題 9.2 (p.203):

- 最適投入量 l^*, k^* は, p.133 より得られる.

- 「これより均衡価格は」について: $C(y,w,r) = c(w,r)y$ の形に表されるから, 均衡価格 p^e とすると, $p^e = C(y,w,r)/y$. よって, $p^e = w/\alpha + r/\beta$.

練習問題 9

9.2 (p.203) の解答 (p.282)「不等式の成立はただちに見てとれる」について: $x = a$ のとき, 問題の不等式は等号で成り立つ. $a < x \le b$ のとき, $x = ta + (1-t)b$ となる $0 \le t < 1$ が存在する. $x - a = (1-t)(b-a) \Leftrightarrow 1 - t = (x-a)/(b-a)$ であり, f は凸であるから,

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f\bigl(ta + (1-t)b\bigr) - f(a) \\ &\le tf(a) + (1-t)f(b) - f(a) = (1-t)[f(b) - f(a)] = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a). \end{aligned}$$

9.3 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が 2 回連続微分可能なとき, 次のことが知られている[*4].

1. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f''(x) \ge 0$ ならば, f は凸である.
2. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f''(x) > 0$ ならば, f は狭義凸である.

これを使うと, (1), (2) は解答 (p.282) の通り狭義凸であることがわかる.
(3) について: $x \ne \pm 1$ のとき, $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$ である. したがって, $x < -1$ または $x > 1$ のとき $f'(x) > 0$ だから, f の定義域を $(-\infty, -1)$ または $(1, \infty)$ に制限すれば狭義凸である. また, $-1 < x < 1$ のとき $f'(x) < 0$ だから, f の定義域を $(-1, 1)$ に制限すれば狭義凹である. f の定義域を $\{x \in \mathbb{R}\colon x \ne \pm 1\}$ と考えるとき, f の凹凸を議論する意味はない (定義域が凸でないから). なお, 解答 (p.282) の $f''(x) = \dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ は誤植である.
(4), (5) は, 命題 9.7 (p.183), 定理 9.8 (p.184) を使う.

9.4 (p.204) (1) f の定義域が $[0, \infty)$ であることに注意すると, f は単調増加. よって, f は準凸かつ準凹である.

9.5 「示せ」を「説明せよ」としてはどうか.

9.7 問題を次のように書き換える. 「凸関数ならば準凸関数である, また, 凹関数ならば準凹関数である」. なお, 解答 (p.284) では, 「凸関数ならば準凸関数である」ことを示している.

9.9 「問題 9.8 の」→「問題 9.8 の (1) および (2) の」

9.10 (3) $f(l,k) = \min\{2l + k, l + 2k\}$ の場合: $f(l,k) = \begin{cases} 2l + k & (l \le k) \\ l + 2k & (l > k) \end{cases}$ である. $y, w, r > 0$ を所与とする. 求める費用関数を $C(y,w,r)$ とする. $c(l,k) = wl + rk$ とおくと, $k = -\dfrac{w}{r}l + \dfrac{c(l,k)}{r}$ である.

(i) $-w/r < -2 \Leftrightarrow w > 2r$ のとき, $(l^*, k^*) = (0, y)$ のとき, $c(l,k)$ は最小である. よって, $C(y,w,r) = c(0,y) = ry$.

(ii) $-w/r = -2 \Leftrightarrow w = 2r$ のとき, $(l^*, k^*) \in \{(l,k)\colon 0 \le l \le y/3,\ k = -2l + y\}$ のとき, $c(l,k)$ は最小である. よって, $C(y,w,r) = c(l, -2l + y) = wl + r(-2l + y) = ry$.

(iii) $-2 < -w/r < -1/2$ のとき, $(l^*, k^*) = (y/3, y/3)$ のとき, $c(l,k)$ は最小である. よって, $C(y,w,r) = c(y/3, y/3) = y(w + r)/3$. **解答 (p.284) にはこの場合が書いてある**.

(iv) $-w/r = -1/2 \Leftrightarrow 2w = r$ のとき, $(l^*, k^*) \in \{(l,k)\colon y/3 \le l \le y,\ k = -l/2 + y\}$ のとき, $c(l,k)$ は最小である. よって, $C(y,w,r) = c(l, -l/2 + y/2) = wl + r(-l/2 + y/2) = wy$.

(v) $-w/r > -1/2 \Leftrightarrow 2w < r$ のとき, $(l^*, k^*) = (y, 0)$ のとき, $c(l,k)$ は最小である. よって, $C(y,w,r) = c(y,0) = wy$.

[*4] 例えば, 吹田信之, 新保経彦「理工系の微分積分学」学術図書出版社 [3] の p.58 の系 2.

10 章 比較静学

10.1 最適解の比較静学

定理 10.2 (p.206)

- p.206 の式 (10.2) および p.207 の式 (10.6): 「$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial a}$」→ 「$\dfrac{\partial^2 f}{\partial a \partial x}$」
- 以下が仮定されていると, p.207 の証明を読むことができる.

  f が 2 回連続微分可能で, 各 a に対して最大解 $x^*(a)$ が存在し, それが 2 階の十分条件を満たす, つまり, $f_{xx}\big(x^*(a), a\big) < 0$.
- $x^*(a)$ が 2 階の十分条件を満たさない場合は, 定理 10.2 の結論は得られない.

例 1. $f(x,a) = -(x-a)^4$ のとき, 最大解は $x^*(a) = a$. よって, $dx^*/da = 1 > 0$. 一方, $f_x(x,a) = -4(x-a)^3$, $f_{xx}(x,a) = -12(x-a)^2$, $f_{xa}(x,a) = 12(x-a)^2$. よって, $f_{xx}\big(x^*(a), a\big) = f_{xa}\big(x^*(a), a\big) = 0$.

例題 10.1 (p.207): 解答では, 定理 10.2 を使うのか, 定理 10.2 の証明と同様に考えるのか. もし, 定理 10.2 を使うならば, $\pi_y(y,p) = p - C'(y)$, $\pi_{yp}(y,p) = 1$. したがって, 任意の $p > 0$ に対して,

$$\operatorname{sign}\big(y'(p)\big) = \operatorname{sign}\big(\pi_{yp}(y,p)\mid_{y=y(p)}\big) = \operatorname{sign}(1) = +1.$$

定理 10.4 (p.208)

- 定理 10.2 と同様に, 定理 10.4 では以下が仮定されていると考える.

  f が 2 回連続微分可能で, a に対して最大解 $\big(x_1^*(a), x_2^*(a)\big)$ が存在し, それが 2 階の十分条件を満たす. つまり, $f_{11}\big(x_1^*(a), x_2^*(a), a\big) < 0$ かつ $\begin{vmatrix} f_{11}\big(x_1^*(a), x_2^*(a), a\big) & f_{12}\big(x_1^*(a), x_2^*(a), a\big) \\ f_{21}\big(x_1^*(a), x_2^*(a), a\big) & f_{22}\big(x_1^*(a), x_2^*(a), a\big) \end{vmatrix} > 0$.
- 「$f_a = \dfrac{\partial}{\partial a} f(x_1, x_2, a)$」→「$f_{ij} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x_1, x_2, a)$」, 「$f_{ja} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_j \partial a} f(x_1, x_2, a)$」」→「$f_{ja} = \dfrac{\partial^2}{\partial a \partial x_j} f(x_1, x_2, a)$」

例題 10.2

- p.209, 下から 3 行目: 「$r(w)$」→「$k(w)$」
- p.210, 2 行目: 「2 階の条件 $f_{kk} \leq 0$」は命題 9.7 (p.183) のことを指すのか? ただし, 命題 9.7 とこの例題では関数の定義域が異なる.

10.2 制約付き最適解の比較静学

p.211, 定理 10.6 の上: 「$\partial^2 \mathcal{L}/\partial x_1 \partial a$」→ 「$\partial^2 \mathcal{L}/\partial a \partial x_1$」

定理 10.6

- p.212 の冒頭: 前ページ (p.211) の $\mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2, a) = f(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2, a)$ に合わせるならば, 3, 4 行目の式を

$$\mathcal{L}_1\big(x_1(a), x_2(a), a, \lambda(a)\big) \equiv 0 \to \mathcal{L}_1\big(\lambda(a), x_1(a), x_2(a), a\big) \equiv 0;$$
$$\mathcal{L}_2\big(x_1(a), x_2(a), a, \lambda(a)\big) \equiv 0 \to \mathcal{L}_2\big(\lambda(a), x_1(a), x_2(a), a\big) \equiv 0$$

と書き換える. そして, p.212 の 2–4 行目の式を, それぞれ a で偏微分すると,

$$\begin{aligned} -g_1x_1' - g_2x_2' - g_a &= 0 \\ \mathcal{L}_{1\lambda}\lambda' + \mathcal{L}_{11}x_1' + \mathcal{L}_{12}x_2' + \mathcal{L}_{1a} &= 0 \\ \mathcal{L}_{2\lambda}\lambda' + \mathcal{L}_{21}x_1' + \mathcal{L}_{22}x_2' + \mathcal{L}_{2a} &= 0 \end{aligned}$$

となる. ただし, 各関数の引数 $\bigl(\lambda(a), x_1(a), x_2(a), a\bigr)$ を省略している (以下, 同様に省略する). よって, $\mathcal{L}_{1\lambda}(\lambda, x_1, x_2, a) = -g_1(x_1, x_2, a)$, $\mathcal{L}_{2\lambda}(\lambda, x_1, x_2, a) = -g_2(x_1, x_2, a)$ に注意すると,

$$\begin{aligned} 0\cdot\lambda' - g_1x_1' - g_2x_2' &= g_a \\ -g_1\lambda' + \mathcal{L}_{11}x_1' + \mathcal{L}_{12}x_2' &= -\mathcal{L}_{1a} \\ -g_2\lambda' + \mathcal{L}_{21}x_1' + \mathcal{L}_{22}x_2' &= -\mathcal{L}_{2a} \end{aligned}$$

となる. これらの式を行列で表現したものが p.212 の真ん中の式である.

- p.212 の下から 4 行目の「二階の条件から, 分母はいずれも正でなければならない」について: ここでも, 最適解は二階の十分条件 (定理 8.4, p.168–169) を満たすと仮定しておく.

例題 10.3 (p.213)

- 「単調増加かつ準凸」について: 定理 9.16 (p.194) を考慮すると「単調増加かつ狭義準凸」かもしれないが, 解答でこの仮定は直接使用しない.
- p_2, I は定数, $f(x_1, x_2) = u(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2, a) = ax_1 + p_2x_2 - I$ として, 定理 10.6 の結果を使えばよい. $g_1(x_1, x_2, a) = a$, $g_2(x_1, x_2, a) = p_2$, $g_a(x_1, x_2, a) = x_1$ であり, $\mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2, a) = f(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2, a) = u(x_1, x_2) + \lambda(I - ax_1 - p_2x_2)$ より, $\mathcal{L}_1(\lambda, x_1, x_2, a) = u_1(x_1, x_2) - a\lambda$, $\mathcal{L}_{11}(\lambda, x_1, x_2, a) = u_{11}(x_1, x_2)$, $\mathcal{L}_{12}(\lambda, x_1, x_2, a) = u_{12}(x_1, x_2)$, $\mathcal{L}_{1a}(\lambda, x_1, x_2, a) = -\lambda$, $\mathcal{L}_2(\lambda, x_1, x_2, a) = u_2(x_1, x_2) - p_2\lambda$, $\mathcal{L}_{21}(\lambda, x_1, x_2, a) = u_{21}(x_1, x_2)$, $\mathcal{L}_{22}(\lambda, x_1, x_2, a) = u_{22}(x_1, x_2)$, $\mathcal{L}_{2a}(\lambda, x_1, x_2, a) = 0$. よって,

$$\begin{vmatrix} 0 & g_a & g_2 \\ g_1 & \mathcal{L}_{1a} & \mathcal{L}_{12} \\ g_2 & \mathcal{L}_{2a} & \mathcal{L}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_1(a) & p_2 \\ a & -\lambda(a) & u_{12}\bigl(x_1(a), x_2(a)\bigr) \\ p_2 & 0 & u_{22}\bigl(x_1(a), x_2(a)\bigr) \end{vmatrix} = p_2x_1u_{12} - ax_1u_{22} + \lambda p_2^2$$

となる (一部の関数の引数を省略している).
- p.213, 下から 10 行目の「ラグランジュ乗数は正である」について: $\mathcal{L}_1\bigl(\lambda(a), x_1(a), x_2(a), a\bigr) = 0$ より, $u_1\bigl(x_1(a), x_2(a)\bigr) = a\lambda(a)$ だから, $\lambda(a) > 0$.

10.3 最適値の比較静学: 包絡線定理

例 10.10 で定理 10.9 を直接使うことはできないので (変数の数が違うから), 次のようなパラメータつき最適化問題を考え, 定理 10.9 を書き換える.

> $A \subset \mathbb{R}^m$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon X \times A \to \mathbb{R}$ を所与とし, $a \in A$ ごとに, $f(\,\cdot\,, a)$ を最大化 (または最小化) せよ.

定理 4 (定理 10.9 の書き換え)**.** $a = (a_1, \dots, a_m) \in A$ ごとに, 上記の最適化問題の局所最適解 $y(a) = \bigl(y_1(a), \dots, y_n(a)\bigr)$ が存在し, f および y は微分可能とする. さらに, $v(a) = f\bigl(y(a), a\bigr)$ として, $v\colon A \to \mathbb{R}$ を定義し, $j \in \{1, \dots, m\}$ とする. このとき, $\dfrac{\partial v}{\partial a_j}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial a_j}\bigl(y(a), a\bigr)$.

証明. $v(a)$ を a_j で偏微分すると, $\dfrac{\partial v}{\partial a_j}(a) = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\bigl(y(a), a\bigr)\dfrac{\partial y_i(a)}{\partial a_j} + \dfrac{\partial f}{\partial a_j}\bigl(y(a), a\bigr)$. $y(a)$ が局所最適解であることより, すべての $i = 1, \ldots, n$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\bigl(y(a), a\bigr) = 0$. よって, $\dfrac{\partial v}{\partial a_j}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial a_j}\bigl(y(a), a\bigr)$. □

例 10.10 (p.216): $\dfrac{\partial}{\partial p}\bigl(pf(\ell, k) - w\ell - rk\bigr) = f(\ell, k)$, $\dfrac{\partial}{\partial w}\bigl(pf(\ell, k) - w\ell - rk\bigr) = -\ell$, $\dfrac{\partial}{\partial r}\bigl(pf(\ell, k) - w\ell - rk\bigr) = -k$ だから, 定理 4 より, 式 (10.17) が得られる.

定理 10.11: p.218 の 5 行目の式および式 (10.22) の λ を, $\lambda(a)$ とする.

例 10.12 で定理 10.11 を直接使うことはできないので (変数の数が違うから), 次のような条件付き最適化問題を考え, 定理 10.11 を書き換える.

> $A \subset \mathbb{R}^m$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon X \times A \to \mathbb{R}$ を所与とし, $a \in A$ ごとに, $h(x, a) = 0$ のもとで $f(x, a)$ を最大化 (または最小化) せよ.

定理 5 (定理 10.11 の書き換え)**.** f と h は連続微分可能で, $a = (a_1, \ldots, a_m) \in A$ ごとに, 上記の最適化問題の局所最適解が $y(a) = \bigl(y_1(a), \ldots, y_n(a)\bigr)$ が存在し, $y\colon A \to \mathbb{R}$ も微分可能とし, ラグランジュの定理が成り立つための条件[*5] を仮定する. さらに, $a \in A$ に対して $\lambda(a)$ が存在し, 任意の $i = 1, \ldots, n$ に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\bigl(y(a), a\bigr) = \lambda(a)\dfrac{\partial h}{\partial x_i}\bigl(y(a), a\bigr)$ とし, $v(a) = f\bigl(y(a), a\bigr)$ として $v\colon A \to \mathbb{R}$ を, $\mathcal{L}(\lambda, x, a) = f(x, a) - \lambda h(x, a)$ として $\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \times X \times A \to \mathbb{R}$ を定義し, $j \in \{1, \ldots, m\}$ とする. このとき, $\dfrac{\partial v}{\partial a_j}(a) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j}\bigl(\lambda(a), y(a), a\bigr)$.

証明. $h\bigl(y(a), a\bigr) = 0$ を, a_j で偏微分すると, $\sum_{i=1}^n \dfrac{\partial h}{\partial x_i}\bigl(y(a), a\bigr)\dfrac{\partial y_i}{\partial a_j}(a) + \dfrac{\partial h}{\partial a_j}(a) = 0$. よって, 仮定より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial a_j}(a) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigl(y(a), a\bigr)\frac{\partial y_i}{\partial a_j}(a) + \frac{\partial f}{\partial a_j}\bigl(y(a), a\bigr) = \lambda(a)\sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}\bigl(y(a), a\bigr)\frac{\partial y_i}{\partial a_j}(a) + \frac{\partial f}{\partial a_j}\bigl(y(a), a\bigr)\\ &= -\lambda(a)\frac{\partial h}{\partial a_j}(a) + \frac{\partial f}{\partial a_j}\bigl(y(a), a\bigr) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j}\bigl(\lambda(a), y(a), a\bigr).\end{aligned}$$

□

例 10.12 (p.219): $\mathcal{L}(\lambda, \ell, k, w, r, y) = w\ell + rk - \lambda[f(\ell, k) - y]$ より, $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \ell$, $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = k$. よって, 定理 5 より, p.219 中ほどの等式が得られる.

10.4 方程式解の比較静学

この部分は, (連立) 陰関数定理と (それに含まれる) 陰関数微分の公式を利用するだけである. 後の例 10.14 (p.221) や練習問題で利用するために定理 10.13 を一般化した形で書いておく.

定理 6 (定理 10.13 の書き換え)**.** $n \in \mathbb{N}$, U を $\mathbb{R}^n$ の開集合, $f(y_1, \ldots, y_{n+2})$ と $g(y_1, \ldots, y_{n+2})$ を微分可能な $n+2$ 変数関数とし, 関数 $\phi\colon U \to \mathbb{R}$, $\psi\colon U \to \mathbb{R}$ は微分可能で, 任意の $x \in U$ に対して

$$f\bigl(\phi(x), \psi(x), x\bigr) = 0,\ g\bigl(\phi(x), \psi(x), x\bigr) = 0$$

が成り立つとする. さらに, $a \in U$, $b = \bigl(\phi(a), \psi(a), a\bigr)$ とし, $\begin{vmatrix} f_1(b) & f_2(b) \\ g_1(b) & g_2(b) \end{vmatrix} \neq 0$ とする. このとき,

$$\begin{bmatrix} \phi_1(a) & \cdots & \phi_n(a) \\ \psi_1(a) & \cdots & \psi_n(a) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1(b) & f_2(b) \\ g_1(b) & g_2(b) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} f_3(b) & \cdots & f_{n+2}(b) \\ g_3(b) & \cdots & g_{n+2}(b) \end{bmatrix}.$$

[*5] $\left(\dfrac{\partial h}{\partial x_1}\bigl(y(a)\bigr), \ldots, \dfrac{\partial h}{\partial x_n}\bigl(y(a)\bigr)\right) \neq 0$ など.

証明. $F(x) = \begin{bmatrix} f\bigl(\phi(x), \psi(x), x\bigr) \\ g\bigl(\phi(x), \psi(x), x\bigr) \end{bmatrix}$ とおき, E を n 次正方行列とする. 連鎖公式より,

$$F'(a) = \begin{bmatrix} f_1(b) & f_2(b) & \cdots & f_{n+2}(b) \\ g_1(b) & g_2(b) & \cdots & g_{n+2}(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \nabla\phi(a) & \\ & \nabla\psi(a) & \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} f_1(b) & f_2(b) \\ g_1(b) & g_2(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla\phi(a) \\ \nabla\psi(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_3(b) & \cdots & f_{n+2}(b) \\ g_3(b) & \cdots & g_{n+2}(b) \end{bmatrix} E.$$

$F(x) \equiv 0$ だから, $F'(a) = 0$. したがって, 結論の等式が得られる. □

例 10.14 (p.221–222): $\partial f/\partial Y = C'(Y) - 1$, $\partial f/\partial r = I'(r)$, $\partial g/\partial Y = L_1'(Y)$, $\partial g/\partial r = L_2'(r)$, $\partial f/\partial G = 1$, $\partial g/\partial G = 0$. 「経済学的分析から... が知られている (p.222)」より, 任意の $Y > 0$, $r > 0$ に対して,

$$\begin{vmatrix} \partial f/\partial Y & \partial f/\partial r \\ \partial g/\partial Y & \partial g/\partial r \end{vmatrix} = [G'(Y) - 1]L_2'(r) - I'(r)L_1'(r) > 0.$$

微分可能な関数 $Y^*(G, M)$, $r^*(G, M)$ が存在し, 任意の $G > 0$, $M > 0$ に対して,

$$f\bigl(Y^*(G, M), r^*(G, M), G, M\bigr) = 0, \quad g\bigl(Y^*(G, M), r^*(G, M), G, M\bigr) = 0$$

が成り立つとする. 定理 6 より,

$$\begin{bmatrix} Y_G^* & Y_M^* \\ r_M^* & r_M^* \end{bmatrix} = -\frac{1}{[G'(Y^*) - 1]L_2'(r^*) - I'(r^*)L_1'(r^*)} \begin{bmatrix} L_2'(r^*) & -I'(r^*) \\ -L_1'(Y^*) & C'(Y^*) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{1}{[G'(Y^*) - 1]L_2'(r^*) - I'(r^*)L_1'(r^*)} \begin{bmatrix} L_2'(r^*) & I'(r^*) \\ -L_1'(Y^*) & 1 - C'(Y^*) \end{bmatrix}$$

が得られる. ただし, Y^*, r^* 等の引数を省略している.

練習問題 10

10.1 (p.222)

- 問題の最後の式の一番右: 「$\ell(a)$」→「$\ell = \ell(a)$」
- $F(\ell, a) = pf(\ell, a) - w\ell$ とおき, 定理 10.7 (p.214) を使うと, $\partial F/\partial a = p\partial f/\partial a$. よって,

$$\frac{d\pi}{da}(a) = \frac{\partial F}{\partial a}\bigg|_{\ell=\ell(a)} = p\frac{\partial f}{\partial a}\bigl(\ell(a), a\bigr).$$

10.2 (p.223): 簡単のため, 以下を仮定する. f は 2 回連続微分可能で, $(p, w, r) \in \mathbb{R}^3_{++}$ ごとに π の極大点 $\bigl(l^*(p, w, r), k^*(p, w, r)\bigr)$ が一意に存在し, それが 1 階の必要条件および 2 階の十分条件をみたし, l^* と k^* は微分可能とする. $F(l, k, p, w, r) = pf_l(l, k) - w$, $G(l, k, p, w, r) = pf_k(l, k) - r$ とおく. $x = (p, w, r) \in \mathbb{R}^3_{++}$ のとき, 1 階の必要条件より,

$$F\bigl(l^*(x), k^*(x), x\bigr) = pf_l\bigl(l^*(x), k^*(x)\bigr) - w = 0, \, G\bigl(l^*(x), k^*(x), x\bigr) = pf_k\bigl(l^*(x), k^*(x)\bigr) - r = 0,$$

2 階の十分条件より, $pf_{ll}(l^*, k^*) < 0$,

$$\begin{vmatrix} F_l(l^*, k^*, x) & F_k(l^*, k^*, x) \\ G_l(l^*, k^*, x) & G_k(l^*, k^*, x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pf_{ll}(l^*, k^*) & pf_{lk}(l^*, k^*) \\ pf_{kl}(l^*, k^*) & pf_{kk}(l^*, k^*) \end{vmatrix}$$
$$= p^2 \left[f_{ll}(l^*, k^*)f_{kk}(l^*, k^*) - \bigl(f_{lk}(l^*, k^*)\bigr)^2 \right] > 0$$

で, 特に,$f_{ll}(l^*,k^*)>0$. $f_{kk}(l^*,k^*)>0$ である. 上記において, l^*, k^* 等の引数 (p,w,r) を省略している (これ以降もそうする). よって, 定理 6 より (l_p^*, k_p^* を省略すると),

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} l_w^* & l_r^* \\ k_w^* & k_r^* \end{bmatrix} &= \frac{1}{-1}p^2\left[f_{ll}(l^*,k^*)f_{kk}(l^*,k^*)-\big(f_{lk}(l^*,k^*)\big)^2\right]p\begin{bmatrix} f_{kk}(l^*,k^*) & -f_{lk}(l^*,k^*) \\ -f_{kl}(l^*,k^*) & f_{kk}(l^*,k^*)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{p\left[f_{ll}(l^*,k^*)f_{kk}(l^*,k^*)-\big(f_{lk}(l^*,k^*)\big)^2\right]}\begin{bmatrix}-f_{kk}(l^*,k^*) & f_{lk}(l^*,k^*) \\ f_{kl}(l^*,k^*) & -f_{ll}(l^*,k^*)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

10.3: 例 10.10 (p.216, 217) の後半を真似る. 式 (10.17) より,

$$\begin{aligned} f\big(\ell(p,w,r),k(p,w,r)\big) &= \frac{\partial \Pi}{\partial p}(p,w,r) = \log p - \log 2 - \frac{1}{2}\log w - \frac{1}{2}\log r = \log\frac{p}{2\sqrt{wr}}, \\ \ell(p,w,r) &= -\frac{\partial \Pi}{\partial w}(p,w,r) = \frac{p}{2w} - \sqrt{\frac{r}{w}}, \\ k(p,w,r) &= -\frac{\partial \Pi}{\partial r}(p,w,r) = \frac{p}{2r} - \sqrt{\frac{w}{r}}. \end{aligned}$$

よって,

$$\ell(p,w,r)k(p,w,r) = \frac{p^2}{4rw} - \frac{p}{\sqrt{wr}} + 1 = \left(\frac{p}{2\sqrt{wr}} - 1\right)^2.$$

(i) $\dfrac{p}{2\sqrt{wr}} - 1 \geq 0$ のとき, $\dfrac{p}{2\sqrt{wr}} = \sqrt{\ell(p,w,r)k(p,w,r)} + 1$. よって, $f(\ell,k) = \log\big(\sqrt{\ell k}+1\big)$. (ii) $\dfrac{p}{2\sqrt{wr}} - 1 < 0$ のとき (p.285 の解答にはないが), $\dfrac{p}{2\sqrt{wr}} = 1 - \sqrt{\ell(p,w,r)k(p,w,r)}$. よって, $f(\ell,k) = \log\big(1-\sqrt{\ell k}\big)$.

10.4 (1) は練習問題 8.4 (1) と, (2) は練習問題 8.4 (3) とほぼ同じ. (3), (4) について: 練習問題 8.4 (3) より, 次の連立方程式が得られる.

$$\begin{cases} f(C_1,C_2,Y_1,Y_2,r) &= u'(C_1) - \beta(1+r)u'(C_2) = 0, \\ g(C_1,C_2,Y_1,Y_2,r) &= C_1 + \dfrac{C_2}{1+r} - Y_1 - \dfrac{Y_2}{1+r} = 0. \end{cases} \tag{10.4.1}$$

ここで, $\partial f/\partial C_1 = u''(C_1)$, $\partial f/\partial C_2 = -\beta(1+r)u''(C_2)$, $\partial g/\partial C_1 = 1$, $\partial g/\partial C_2 = 1/(1+r)$, $\partial f/\partial Y_1 = 0$, $\partial g/\partial Y_1 = -1$. よって, 仮定より, 任意の (C_1,C_2,r) に対して

$$\begin{vmatrix} \partial f/\partial C_1 & \partial f/\partial C_2 \\ \partial g/\partial C_1 & \partial g/\partial C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u''(C_1) & -\beta(1+r)u''(C_2) \\ 1 & 1/(1+r) \end{vmatrix} = \frac{u''(C_1)+\beta(1+r)^2u''(C_2)}{1+r} < 0$$

となる. 簡単のため, 連立方程式 (10.4.1) の解 $C_1(Y_1,Y_2,r)$, $C_2(Y_1,Y_2,r)$ が存在し, C_1, C_2 は微分可能と仮定する. 以下, C_1 と C_2 の引数 (Y_1,Y_2,r) を省略する. 定理 6 と仮定より, 任意の (Y_1,Y_2,r) に対して, $\gamma = \dfrac{u''(C_1)+\beta(1+r)^2u''(C_2)}{1+r}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial C_1}{\partial Y_1} & \dfrac{\partial C_1}{\partial Y_2} & \dfrac{\partial C_1}{\partial r} \\ \dfrac{\partial C_2}{\partial Y_1} & \dfrac{\partial C_2}{\partial Y_2} & \dfrac{\partial C_2}{\partial r} \end{bmatrix} &= -\frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+r} & \beta(1+r)u''(C_2) \\ -1 & u''(C_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta u'(C_2) \\ -1 & \dfrac{-1}{1+r} & \dfrac{Y_2-C_2}{(1+r)^2} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix} -\beta(1+r)u''(C_2) & -\beta u''(C_2) & -\dfrac{\beta u'(C_2)}{1+r} + \dfrac{\beta u''(C_2)(Y_2-C_2)}{1+r} \\ -u''(C_1) & \dfrac{-u'(C_2)}{1+r} & \beta u'(C_2) + \dfrac{u''(C_1)(Y_2-C_2)}{(1+r)^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

10.5

- 「$C(q,w,r)=\dfrac{wr}{w+r}q$」→「$C(y,w,r)=\dfrac{wr}{w+r}y$」
- $\mathcal{L}(\lambda,\ell,k,w,r,y)=w\ell+rk-\lambda\bigl(f(\ell,k)-y\bigr)$ とおく．例 10.12 (p.219) より，

$$\ell(w,r,y)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w}(w,r,y)=\frac{\partial C}{\partial w}(w,r,y)=\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{wry}{w+r}\right)=\frac{r^2y}{(w+r)^2},$$
$$k(p,w,r)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r}(p,w,r)=\frac{\partial C}{\partial w}(w,r,y)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{wry}{w+r}\right)=\frac{w^2y}{(w+r)^2}.$$

よって，

$$\sqrt{\ell(p,w,r)}+\sqrt{k(p,w,r)}=\frac{r\sqrt{y}}{w+r}+\frac{w\sqrt{y}}{w+r}=\sqrt{y}.$$

よって，$f(\ell,k)=\bigl(\sqrt{\ell}+\sqrt{k}\bigr)^2$．

10.6: (1) $\mathcal{L}(\lambda,x_1,x_2,p_1,p_2,I)=u(x_1,x_2)-\lambda[p_1x_1+p_2x_2-I]$ とおく．定理 5 より，

$$\frac{\partial v}{\partial I}(p_1,p_2,I)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial I}\bigl(\lambda^*(p_1,p_2,I),x_1(p_1,p_2,I),x_2(p_1,p_2,I),p_1,p_2,I\bigr)=\lambda^*(p_1,p_2,I).$$

(2) p.213 と同様に，$\lambda^*(p_1,p_2,I)>0$ であることがわかるので，(1) より，$\dfrac{\partial v}{\partial I}(p_1,p_2,I)\neq 0$．よって，定理 5 より，$(p_1,p_2,I)=\boldsymbol{x}$ とおくと，

$$\frac{\partial v}{\partial p_1}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_1}\bigl(\lambda^*(\boldsymbol{x}),x_1(\boldsymbol{x}),x_2(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\bigr)=-\lambda^*(\boldsymbol{x})x_1(\boldsymbol{x}).$$

したがって，(1) の結果と合わせると，(10.28) が得られる．

10.7 (p.224)

- 「$\dfrac{\partial S}{\partial p}(p)$」→「$\dfrac{dS}{dp}(p)$」解答 (p.286) でも同様
- 解答 (p.286) でも上記の置き換えをするが，その他に誤植があるので以下に略解を記す．t ごとに，$p^e(t)$，$y^e(t)$ が決まるとすれば，(10.30) より，$D\bigl(p^e(t),t\bigr)=S\bigl(p^e(t)\bigr)$．これの両辺を t で微分すると，

$$\frac{\partial D}{\partial p}\bigl(p^e(t),t\bigr)\frac{dp^e}{dt}(t)+\frac{\partial D}{\partial t}\bigl(p^e(t),t\bigr)=\frac{dS}{dp}\bigl(p^e(t)\bigr)\frac{dp^e}{dt}(t).$$

よって，仮定より，$\dfrac{dp^e}{dt}(t)=\dfrac{\partial D}{\partial t}\bigl(p^e(t),t\bigr)/\left(\dfrac{dS}{dp}\bigl(p^e(t)\bigr)-\dfrac{\partial D}{\partial p}\bigl(p^e(t),t\bigr)\right)<0$．また，(10.30) より，$y^e(t)=S\bigl(p^e(t)\bigr)$．両辺を t で微分すると，仮定より，$\dfrac{dy^e}{dt}(t)=\dfrac{dS}{dp}\bigl(p^e(t)\bigr)\dfrac{dp^e}{dt}(t)<0$．

11 章 数列の収束と関数の連続性・微分可能性

11.1 数列の極限

定義 11.1 (p.227)

- 「<u>すべての</u> $n>N(\epsilon)$」を「<u>すべての</u> $n\geq N(\epsilon)$」とした方が，後のページ (p.229) が読みやすい．
- 「$x_n\to a$」→「$x_n\to 0$」

p.227，下から 4 行目：「$N(\epsilon)=\epsilon^{-2}$ より大きなすべての n」→「ϵ^{-2} より大きなすべての n」または「$N(\epsilon)\geq\epsilon^{-2}$ となる自然数 $N(\epsilon)$ をとり，$N(\epsilon)$ より大きなすべての n」

p.228，6 行目：「$N(\epsilon)=1/\epsilon-1$」の部分も上と同様に修正する．

定理 11.1 (p.228)：「収束数列 $x_n\to a$, $y_n\to b$ について」→「a に収束する数列 $\{x_n\}$ と b に収束する数列 $\{y_n\}$ について」

p.230，2 行目：「M の中でもっとも小さなものを x^* と書こう．」つまり，本書では「上に有界な数列の上界のうち最小なものが存在することを前提」としている．

11.2 関数の連続性と微分可能性

p.232, 1 行目: 「$\lim x_n$」→「$\lim_{n\to\infty} x_n$」

例 11.3: 定理 11.1 より, $x_n \to a$ のとき, $\lim_n f(x_n) = \lim_n (x_n)^2 = \lim_n x_n \times \lim_n x_n = a^2 = f(a)$. よって, f は a で連続である.

定理 11.4 の証明 (p.233): 定理 11.1 より, $x_n \to a$ のとき, $\lim_n (f+g)(x_n) = \lim_n [f(x_n) + g(x_n)] = \lim_n f(x_n) + \lim_n g(x_n) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$. よって, $f+g$ は a で連続である.

定義 11.5 (p.234)

- 数列 $\{h_n\}$ は, 「任意の $n \in \mathbb{N}$ について $h_n \neq 0$」を満たすものとする.
- 「f の微分」→「f の微分係数」
- 「f の偏微分」→「f の (第 1 変数に関する) 偏微分係数」

練習問題 11 (p.235)

11.1: (1) は定理 11.1 より, $\lim_n (1/n^2 + 1) = \lim_n (1/n) \cdot \lim_n (1/n) + 1 = 1$. よって, $\lim_n x_n = \lim_n \dfrac{1/n}{1/n^2+1} = \dfrac{\lim_n 1/n}{\lim_n (1/n^2+1)} = \dfrac{0}{1} = 0$.

11.2: 発散の定義と問題を書き換える.

- 「$\{x_n\}$ が発散するとは」→「$\{x_n\}$ が ∞ に発散するとは」
- 「必ずある」削除
- 「かならず $|x_n| > M$」→「$x_n > M$」
- 「数列の発散を証明」→「数列が ∞ に発散することを証明」
- 解答 (p.286) の最終行: 「,」→「.」
- 解答 (p.287): 「必ず」を削除 (2 個所)

11.4 解答 (p.287): 「必ず」を削除 (2 個所) し, $c = 0$ の場合は別途示す.

12 章 積分と微分方程式

12.4 余剰分析

p.255, 7 行目: 「$= \lambda p$」を「$= p$」とした方がよい.

p.257, 8 行目: 「OPE」→「OAE」

12.6 微分方程式

例題 12.5 (p.264)

- 「$\log f(x) = \int 3\alpha\sqrt{x}\, dx$」→ 「$\log f(x) = \int \alpha\, dx$」
- 途中から e^C を C と表している. そうしない場合は, 「あるいは」以降は次のようになる.

  よって $f(x) = e^C e^{\alpha x}$ を得る. さらに $e^C = f(0) = C_0$ であるから,

例題 12.6 (p.264)

- 「$\log f(x) = \int \alpha\, dx$」→ 「$\log f(x) = \int 3\alpha\sqrt{x}\, dx$」
- 途中から e^C を C と表している. そうしない場合は, 「あるいは」以降は次のようになる.

  よって $f(x) = e^C e^{2\alpha x\sqrt{x}}$ を得る. さらに $e^C = f(0) = C_0$ であるから,

例題 12.7 (p.265)

- 途中から e^C を C と表している．そうしない場合は，「したがって」以降は次のようになる．

  したがって $f(x) = e^C e^{H(x)}$ を得る．さらに $e^C e^{H(0)} = f(0) = C_0$ より，$e^C = C_0 e^{-H(0)}$ となるから

- 「とくに $x \geq 0$ について」は不要と思われる．

例題 12.9 (p.266)

- この例題は，「12.4 余剰分析」の例題と思われる．
- p.266 の下から 5 行目：「$U(x.m)$」→「$U(x, m)$」

参考文献

[1] Mordecai Avriel, Walter E. Diewert, Siegfried Schaible, and Israel Zang. *Generalized concavity*, Vol. 63 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2010. Reprint of the 1988 original [MR0927084].

[2] 永田良, 田中久稔. 経済数学 (経済学教室). 培風館, 3 2012.

[3] 吹田信之, 新保経彦. 理工系の微分積分学. 学術図書出版社, 10 1996.

[4] Knut Sydsaeter, Peter Hammond, Atle Seierstad, and Arne Strom. *Further Mathematics for Economic Analysis (Financial Times)*. Prentice Hall, 2 edition, 12 2008.