

これは, 文献 [1] をゼミナールで輪読した際に気になったところをまとめたものです。何かお気づきの点は, 「aoyama アットマーク bm.skr.jp」までお知らせください。以下, 誤植と思われるところは「A(元)→B(修正案)」と記しています。

1 章 集合の基礎と数の性質

1.3 ベクトルの演算

定理 1.4 の証明 (p.9) 式 (1.1) が成り立つことは, その後に説明しているようだ。

1.4 集合

(p.12) 本書では, $\subset$ は真部分集合であることを表す。部分集合を表す記号は $\subseteq$ であることに注意。

1.6 ノルム, 開集合, 閉集合

定義 1.9 (p.19) $\mathbb{R}^2$ のノルムの定義しか書いていないが, 後で困らないだろうか?

定義 1.11 (p.20) 次のように書き換えるとよい。

$a \in \mathbb{R}^2$, $M \subseteq \mathbb{R}^2$ とする。このとき, a が M の境界点であるとは, 任意の正の数 ϵ に対し $U(a; \epsilon) \cap M \neq \emptyset$ かつ $U(a; \epsilon) \cap M^c \neq \emptyset$ が成り立つときをいう。 M の境界点をすべて集めた集合を, M の境界という。

練習問題 1

1.2 (p.28) $x, y \in \mathbb{R}^2$ のとき, $\|x - y\|$ を x と y の距離という。

1.4 (2) $x = (x_1, x_2)$ とするとき, $2x + 3e = (2x_1 + 3, 2x_2 + 3)$ だから, $2x + 3e \leq 0 \Leftrightarrow$ 「 $2x_1 + 3 \leq 0$ かつ $2x_2 + 3 < 0$ 」または「 $2x_1 + 3 < 0$ かつ $2x_2 + 3 \leq 0$ 」である (p.5 の定義 1.2 参照)。よって, $(-2/3, -2/3)$ は (2) の集合の点ではない。

1.5 (2) は, 開集合でも閉集合でもない。なお, 「(3) が閉集合である」の証明は, もう少し道具を揃えておかないと難しいかもしれない。

1.6 (2) 図 A1.6 (p.274) の縦軸: 「1」→「2」

2 章 1 変数の関数

2.1 関数と定義域

定義 2.1 (iii) (p.31) 関数 f の定義域が D であり, 値域が R の部分集合であるとき, $f: D \rightarrow R$ と表す。

2.2 さまざまな関数

命題 2.5 (p.35) 「と約束する」→「となる」

命題 2.5 のすぐ下 「任意の $x \geq 0$ 」 $\rightarrow$ 「任意の $x > 0$ 」

p.35 の下から 2 行目 「 x がどんな数であれ」 $\rightarrow$ 「 x がどんな正の数であれ」

命題 2.6 (p.36) m, n は自然数と思われる.

練習問題 2

2.4 (p.48) (2) と (3) の f/g では約分せず, その代わりに定義域が制限されたと考えることもできる.

2.6 (p.49) (2) と (3) では, f の定義域を (例えば) $\mathbb{R}_{++}$ としておく. (4) では, f の定義域を次のようにする. $a > 1$ のとき $\mathbb{R}_+$, $0 < a < 1$ のとき $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 0\}$. なお, どちらの場合でも f の値域は $\mathbb{R}_+$ だから, f^{-1} の定義域は $\mathbb{R}_+$ である.

3 章 1 変数関数の微分

3.3 基本的な関数の微分

定義 3.1 (p.55) 「 f の微分」 $\rightarrow$ 「 f を微分する」

(p.56) 微分の定義で, $h = t - x$ と変数変換をする場合, x が开区間の点 (x が関数の定義域の内点) としての方が都合がよい.

(p.58) $h \rightarrow 0$ のとき $u \rightarrow 0$ の部分は, 指数関数の (0 での) 連続性を使っている.

(p.59) 式 (3.15) への変形では, $\log_a$ が連続であることを使っている.

3.4 微分公式

定理 3.7 (p.62) 証明では $\lim$ に関する定理 (性質) を使っている. なお, (ii) は (iii) の特別な場合である.

定理 3.8 (p.63) 証明の冒頭で, $\lim$ に関する定理 (関数の積に関する) を説明しているが, このことは, 同じページの定理 3.7 の証明の中ですでに使っている.

定理 3.8 (p.64) 証明の中で f の連続性を使っている.

定理 3.9 (p.64) 結論に「 f^{-1} は y で微分可能で」を挿入するとよい.

べき関数の微分 (p.65) $x > 0$ を仮定しておく.

定理 3.10 (p.66) X を f と g の定義域とし, $x \in X$ に対して $g(x) \neq 0$ を仮定する. なお, $f(x) \equiv 1$ は, $x \in X$ に対して $f(x) = 1$ と解釈する.

(p.67) $\phi \rightarrow \psi$ (3 箇所).

例題 3.5 (p.69) (4) $x^2 + 1 > 0$ なので, この関数の定義域を $\{x \in \mathbb{R} : x > -3\}$ としてよい. よって, $\log(x+3)$, $\log(x^2+1)$ には意味がある.

練習問題 3

3.3 (p.73) (3) の解答 (p.275) $\frac{2x}{x^2+1} \log(x^2+1) \rightarrow \frac{x}{x^2+1} \log(x^2+1)$

4 章 1 変数関数の最適化問題

4.1 極大・極小と一階の条件

定義 4.2 (p.75) 「がゼロ」を削除

例題 4.1 (p.76) グラフの概形 (図 4.2) を得るには, 次の定理が必要であろう. このことは, 図 4.3 でも

同様.

定理 1. 開区間 I で微分可能な関数 f について, 以下が成り立つ.

1. すべての $x \in I$ に対して $f'(x) > 0$ ならば, f は I で狭義単調増加である;
2. すべての $x \in I$ に対して $f'(x) < 0$ ならば, f は I で狭義単調減少である.

4.3 二階の条件

定義 4.3 (p.81) 「関数 f が $x = a$ で凸であること」を定義しているが, この概念をどこかで使うのだろうか? とりあえず, 次の例 4.2 では使わないようだ.

4.4 経済学への応用: 短期の企業行動

定理 4.3 (p.83) すべての $\ell > 0$ で $f''(\ell) < 0$ を仮定しておくと, このとき, 定理 4.3 の証明の最後の括弧内のこと

(4.6) を満たし得る l^* はただ一つしか存在しない

が得られる. 実際, $f'(l^*) = f'(l^{**}) = w/p$ とするとき, 定理 1 より f' は $(0, \infty)$ で狭義単調減少だから, $l^* < l^{**}$ ならば $w/p = f'(l^*) > f'(l^{**}) = w/p$ となり, $l^* > l^{**}$ ならば $w/p = f'(l^*) < f'(l^{**}) = w/p$ となるので, $l^* = l^{**}$ である.

例題 4.4 (1) を次のように修正するとよい.

$f(\ell) = 2\sqrt{\ell}$ のとき, $f'(\ell^*) = w/p$ となる $\ell^* > 0$ が存在し, さらに $f''(\ell^*) < 0$ となることを確認せよ.

例題 4.4 の解答 (p.84) $f'(\ell)$, $f''(\ell)$ と書いた方がはっきりする.

式 (4.8) (p.84) $C(y) = w \cdot f^{-1}(\ell) + \bar{C} \rightarrow C(y) = w \cdot f^{-1}(y) + \bar{C}$

定理 4.4 「最大化されている」→「極大」としてもよい.

例題 4.5 (p.85) 「 $C = 10$ 」→「 $\bar{C} = 10$ 」. (1) の解答の C' と C'' を, それぞれ, $C'(y)$ と $C''(y)$ とした方がわかりやすい.

$C''(y)$ の計算 (p.86) (4.14) の関係が成り立っているとき, y^* を変数と考え改めて y 書き, $C''(y)$ を計算した.

練習問題 4

4.2 (p.86) グラフの概形を描くためには, 定理 1 などを使わねばならない.

4.3 例題 4.4 を真似ればよい. (3) では, $\ell^* = 5 - 1/(2p)$ なので, $p \geq 1/10$ を仮定しておく. ちなみに, f は $\ell = 5$ で微分可能で $f'(5) = 0$ である.

4.4 (p.87)

- (1) と (2) では, 仮定「 $(ATC)'(\bar{y}) = 0$ となる $\bar{y} > 0$ が存在する」を追加するとよい.
- (1) の解答 (p.276) で $(ATC)''(\bar{y}) > 0$ を示しているのが, 問題 (1) を次のように書き換える.
 $ATC(\bar{y}) = C'(\bar{y})$ が成り立つことを示せ. また, $\bar{y}$ は ATC の極小点であることを示せ.
- (2) では, $y^* > 0$ で利潤が最大であると仮定するとよい.

まず, ATC は $\bar{y}$ で最小であることを示す.

証明. 関数 $\phi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $\phi(y) = C'(y)y - C(y)$ で定義する. $\phi'(y) = C''(y)y$ であるから, 仮定より, $\phi'(y) > 0 (\forall y > 0)$. つまり, 定理 1 より, ϕ は $(0, \infty)$ で狭義単調増加である. $(ATC)'(y) = \frac{\phi(y)}{y^2}$, $(ATC)'(\bar{y}) = 0$ より, $0 < y < \bar{y}$ のとき $(ATC)'(y) < 0$, つまり, $0 < y < \bar{y}$ のとき $ATC(y)$ は狭義単調減少である. また, $\bar{y} < y$ のとき $(ATC)'(y) > 0$, つまり, $\bar{y} < y$ のとき $ATC(y)$ は狭義単調増加である. 以上より, $ATC(y)$ は $\bar{y}$ で最小であることが示せた. $\square$

次に, $p > \bar{p}$ ならば最大化された利潤の値 $\pi(y^*)$ は正であることを示す.

証明. π は y^* で最大だから,

$$\pi(y^*) \geq \pi(\bar{y}) = p\bar{y} - C(\bar{y}) = p\bar{y} - ATC(\bar{y})\bar{y} = (p - \bar{p})\bar{y}.$$

したがって, $p > \bar{p}$ なら $\pi(y^*) > 0$ である. $\square$

最後に, $\pi(y^*) > 0$ ならば $p > \bar{p}$ であることを示す.

証明. ATC は $\bar{y}$ で最小で, $y^* > 0$ であるから, $C(y^*) = ATC(y^*)y^* \geq ATC(\bar{y})y^*$. よって,

$$\pi(y^*) = py^* - C(y^*) \leq py^* - ATC(\bar{y})y^* = (p - \bar{p})y^*.$$

したがって, $\pi(y^*) > 0$ ならば $p > \bar{p}$ である. $\square$

- (3) では, その解答 (p.276) と合わせるために問題文を次のように書き換えた方がわかりやすい.
「 $p < \bar{p}$ である限り利潤は正になり得ないことを示せ。」 $\rightarrow$ 「 $p > \bar{p}$ であるとき, またそのとに限り, 最大化された利潤は正になることを示せ。」

5 章 多変数関数と偏微分

5.2 偏微分の定義と計算

例 5.2 (p.91): 「によって微分」 $\rightarrow$ 「によって偏微分」. 例 5.1 の表現と合わせる.

定理 5.3, 式 (5.13), 定理 5.8 (p.92, p.96): $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ である.

式 (5.14) (p.93): (5.12) 式の上に $y = f(w, z)$ と書いてあるで, 例えば,

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial w}(g(x_1, x_2), h(x_1, x_2)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial f}{\partial z}(g(x_1, x_2), h(x_1, x_2)) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

とする. (5.15) の ∂g_j も ∂z_j とする.

5.4 方向微分と全微分

第 2 段落 (p.98): $\mathbf{x}$ を D の内点^{*1}, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ とする.

定理 5.10 (p.99): $\mathbf{a} = (a_1, a_1, \dots, a_n) \rightarrow \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

定理 5.10 の証明 (p.99): $\phi'(h)$ を計算し $h = 0$ を代入しているが, 最初から $\phi'(0)$ を計算すればよい.

例 5.11 (p.101): $\mathbf{x} = (0.01, 0.02) \rightarrow \Delta \mathbf{x} = (0.01, 0.02)$

^{*1} $\mathbf{x}$ を D の内点であるとは, $B(\mathbf{x}, r) \subset D$ となる $r > 0$ が存在するときをいう.

5.6 勾配ベクトルと接線の方程式

式 (5.31) (p.106): $\frac{\partial f}{\partial x_1} f(c_1, c_2) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, c_2), \frac{\partial f}{\partial x_2} f(c_1, c_2) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1, c_2)$. 式 (5.31) の 3 行上の式も同様.

式 (5.32) (p.107): $\frac{\partial f}{\partial x_2} f(c_1, c_2) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, c_2), \frac{\partial f}{\partial x_1} f(c_1, c_2) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1, c_2)$

定理 5.18 の 2 行上 (p.107): の接線の $\rightarrow$ の点 $c = (c_1, c_2)$ における接線

5.7 高階偏微分

(p.107): 偏微分 $\rightarrow$ 偏導関数 (何カ所かある)

ヤングの定理 (p.108): これは一般的に成り立つこと $\rightarrow$ これはある仮定のもとで成り立つこと

定義 5.5 (p.108): (i) k 階微分し $\rightarrow k$ 回微分し

5.8 偏微分の計算例

例題 5.2 (p.110): (1) $\frac{\partial f}{\partial g} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial f}{\partial h} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}$.

例題 5.4 (p.112): (1) 「 $3x + 4y \neq 0$ のとき」を追加, その他も同様.

練習問題 5

5.4 (p.114, p.277): (2) $df = 0.1$.

5.5 (p.114, p.277): (1) $g'(x_1) = \frac{2x_1}{\sqrt{2x_1^2 - 1}}$ で, $x_1 = x_2 = 1$ のとき $g'(1) = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{2 \cdot 1^2 - 1}} = 2$. 他も同様.

6 章 多変数関数の最適化問題

6.1 多変数関数の最適化と一階の条件

p.116 の真ん中あたり: 局所的な極大・極小で $\rightarrow$ 局所的な最大・最小で

定義 6.1 (p.116): d は自然数. $x' \rightarrow x^*$

6.2 制約付き最適化問題とラグランジュ乗数法

p.119 の真ん中あたり: $f(x_1, x_2, \dots, x_n), \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を,

p.121 の真ん中あたり: この 2 直線が接することは, $\rightarrow$ この 2 直線が (x_1^*, x_2^*) で接することは,

p.121 の真ん中あたり: 「同一直線上に位置する」は, 次ページの (6.15) が成り立つことと解釈する.

図 6.3 (p.121) $g = \sqrt{2} \rightarrow g = 2$.

例題 6.2 (p.125): 最適解は $\rightarrow$ 最適解の候補は

6.3 単調変換

例題 6.4 (p.127): $x > 0, y > 0$ とする.

6.4 経済学への応用: 長期の企業行動

式 (6.26) の下 (p.128): この連立方程式の解を (ℓ^*, k^*) とすれば $\rightarrow$ この連立方程式の解が一意的に存在すると仮定し, その解を (ℓ^*, k^*) とすれば

6.5 レオンチェフ型関数の最適化

定理 6.3 (p.133): 仮定が曖昧で証明が書かれていないので書き直す.

その前に, ベクトルの順序と単調増加的な関数の定義を述べる. $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ のとき, $x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2$ と定義する. また, 関数 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が単調増加的であるとは,

$$x, y \in \mathbb{R}^2, x \leq y, x \neq y \Rightarrow g(x) < g(y)$$

が成り立つときをいう.

定理 2 (定理 6.3 の前半の修正版). $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を単調増加的な関数, $\alpha > 0, \beta > 0$ とし, 関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$ で定義し, $c \in \mathbb{R}$ とする. また, S_o を最大化問題 (6.37) の解の集合, つまり, $S_o = \{x \in \mathbb{R}^2: f(x) = \max\{f(z): z \in \mathbb{R}^2, g(z) = c\}\}$ とし, $S_e = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2: \alpha y_1 = \beta y_2, g(y_1, y_2) = c\}$ とおく. このとき, 以下が成り立つ.

1. $S_o \supset S_e$.
2. $S_e \neq \emptyset \Rightarrow S_o \subset S_e$.

証明. 前半を示す. $y = (y_1, y_2) \in S_e$ とし, $y \notin S_o$ を仮定する. よって, $g(y) = c$ かつ $f(y) < \max\{f(z): z \in \mathbb{R}^2, g(z) = c\}$. つまり,

$$\exists x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: g(x) = c, f(y) < f(x).$$

ゆえに,

$$\alpha y_1 = \beta y_2 = \min\{\alpha y_1, \beta y_2\} = f(y_1, y_2) < f(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$$

だから, $\alpha y_1 < \alpha x_1$ かつ $\beta y_2 < \beta x_2$. $\alpha, \beta > 0$ より, $y_1 < x_1$ かつ $y_2 < x_2$. つまり, $y \leq x$ かつ $y \neq x$. 仮定より, g は単調増加的だから, $c = g(y) < g(x) = c$ となり矛盾が生じる. したがって, $y \in S_o$ である.

後半を示す. $x = (x_1, x_2) \in S_o$ とする. 仮定 $S_e \neq \emptyset$ より, $y = (y_1, y_2) \in S_e$ をとることができる. $g(y) = c, f(x) = \max\{f(z): z \in \mathbb{R}^2, g(z) = c\}$ だから

$$\alpha y_1 = \beta y_2 = \min\{\alpha y_1, \beta y_2\} = f(y_1, y_2) \leq f(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\} \quad (1)$$

ここで, $(x_1, x_2) \notin S_e$ を仮定すると, $\alpha x_1 \neq \beta x_2$. つまり, $\alpha x_1 > \beta x_2$ または $\alpha x_1 < \beta x_2$. $\alpha x_1 > \beta x_2$ のとき, (1) より

$$\alpha y_1 = \beta y_2 \leq \beta x_2 < \alpha x_1.$$

$\alpha, \beta > 0$ より, $y_1 < x_1$ かつ $y_2 \leq x_2$. よって, $y \leq x$ かつ $x \neq y$ である. 次に, $\alpha x_1 < \beta x_2$ のとき, (1) より

$$\alpha y_1 = \beta y_2 < \alpha x_1 < \beta x_2.$$

$\alpha, \beta > 0$ より, $y_1 \leq x_1$ かつ $y_2 < x_2$. よって, この場合も $y \leq x$ かつ $x \neq y$ である. したがって, g は単調増加的だから, $c = g(y) < g(x) = c$ となり矛盾が生じる. 以上より, $(x_1, x_2) \in S_e$ が示せた. $\square$

練習問題 6

6.1 (p.134): (2) f を微分可能な 2 変数関数とし, g を微分可能な 1 変数関数で狭義単調増加 (または減少) とし, $h(x, y) = g(f(x, y))$ として h を定義する. このとき, $D_1 h(x, y) = g'(f(x, y)) D_1 f(x, y)$ で, 常に $g'(f(x, y)) > 0$ だから, $D_1 h(x, y) = 0 \Leftrightarrow D_1 f(x, y) = 0$. 同様に, $D_2 h(x, y) = 0 \Leftrightarrow D_2 f(x, y) = 0$. したがって, この問題では, $\phi(x, y) = 1 + (x^2 + 4y^2)/(1 + x^2 + 4y^2)$ とおき, $\nabla \phi(x, y) = (0, 0)$ となる (x, y) を求めればよい.

6.2 (p.134): 「最適化問題を解け」の意味は「最適化問題の局所最適解の候補を求めよ」. 練習問題 6.3 も同様.

6.2 (p.134): (2) の解答 (p.278): 目的関数を 2 乗して $\rightarrow$ 目的関数を $1/2$ 乗して

6.2 (p.134): (3) の解答 (p.278): 制約条件を 2 乗して $\rightarrow$ 制約条件を $1/2$ 乗して

6.3 (p.134): (1), (2): 仮定 $\alpha + \beta = 1$ は不要

6.3 (p.134): (3) の解答 (p.278): 「目的関数を ρ 乗して, 」を追加

6.3 (p.134): (4) の解答 (p.279): 「制約条件を ρ 乗して, 」を追加

6.4 (p.134): $\pi(\ell, k) = p(\sqrt{\ell} + \sqrt{k}) - w\ell - rk$ とおき, $\nabla \pi(\ell, k) = (0, 0)$ を解くと, $\ell = \left(\frac{p}{2w}\right)^2$, $k = \left(\frac{p}{2r}\right)^2$. よって, 供給関数は

$$S(p, w, r) = f\left(\left(\frac{p}{2w}\right)^2, \left(\frac{p}{2r}\right)^2\right) = \frac{p}{2w} + \frac{p}{2r} = \frac{p(w+r)}{2wr}.$$

需要 = 供給, つまり, $S(p, w, r) = D(p)$ とする. このとき, $\frac{p(w+r)}{2wr} = 1/p$ だから, $p > 0$ に注意すると, 均衡価格は $p = \sqrt{\frac{2wr}{w+r}}$. このとき, $D\left(\sqrt{\frac{2wr}{w+r}}\right) = \sqrt{\frac{w+r}{2wr}}$.

7 章 行列と行列式

7.2 行列の演算

行列の実数倍 (p.142): $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$ で定義する. 1 次変換 A の λ 倍を

$$\lambda A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \circ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定義する. このとき, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば,

$$\lambda A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \circ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(ax + by) \\ \lambda(cx + dy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

だから, $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$. つまり, 行列の実数倍は, その行列で表される 1 次変換とベクトルの実数倍という変換を合成したもの.

7.4 逆行列

冒頭部分 (p.147): 関数には逆関数が存在する $\rightarrow$ 関数に対して逆関数を考えることができる

定義 7.5 (p.148): $AB = BA = I$ を満たす行列 B を, A の逆行列といい, A^{-1} と表す.

7.5 3次元ベクトル空間と行列・行列式

p.152, 下から7行目: 立方形 $\rightarrow$ 立方体

7.6 非正方行列と2次形式

第1段落 (p.155): 実数を長方形に $\rightarrow$ 実数を正方形でない長方形に,

第2段落 (p.155): (x_1, x_2) を $\mathbb{R}^3$ に対応 $\rightarrow (x_1, x_2)$ を $\mathbb{R}^3$ の点に対応

練習問題 7

7.4 (p.158): 問題3 $\rightarrow$ 練習問題7.3

8章 関数行列と二階の条件

8.1 関数行列

定義 8.1 (p.160): p.159 の ϕ のようにベクトル値関数の像を列ベクトルで表す場合は, $\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$ なので, $H_f(x, y)$ は (8.2) を転置したもの. 式 (8.3) も同様.

8.2 関数行列と最適化問題の二階の条件

冒頭 (p.161): あくまで極値に $\rightarrow$ あくまで極値の候補に (以下, 同様な修正が数ヶ所必要)

p.162: 「このようにして, ...ポイントである. したがって, 任意の (u, v) に...極大点になることが分かる.」

の部分は, 微分可能などの条件を追加する必要がある. 実際, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$f(x, y) = \begin{cases} (y - x^2)(y - 2x^2) & (y \neq 0); \\ x^2 & (y = 0) \end{cases}$$

で定義されるとき, f は $(0, 0)$ で偏微分可能で, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ となるが, $(0, 0)$ は f の極値点ではない. 一方, $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ として, p.162 (8.4) の $\delta(h)$ を計算してみると,

$$\delta(h) = \begin{cases} h^2 v^2 - 3h^3 v u^2 + 2h^4 u^2 & (v \neq 0); \\ h^2 u^2 & (v = 0) \end{cases}$$

となるから,

$$\delta''(0) = \begin{cases} 2v^2 & (v \neq 0); \\ 2u^2 & (v = 0) \end{cases}$$

である. よって, $(u, v) \neq (0, 0)$ のとき, $\delta''(0) > 0$ である.

p.162 以降: 極点 $\rightarrow$ 臨界点

p.166, 8.2 最後のところ: いわゆる凸関数は $\rightarrow$ 狭義凸関数は

練習問題 8

8.1 (3) (p.172): f の定義域は $\mathbb{R}_{++}^2$ と考える. $f(x, y) = -x + 3y + 4\sqrt{xy}$ で, $\nabla f(x, y) = (-1 + 2\sqrt{y/x}, 3 + 2\sqrt{x/y})$ だから, $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ となる $(x, y) \in \mathbb{R}_{++}^2$ は存在しない. よって, 極値点は存在しない.

8.1 (4): p.279 の 8.1 (3) の解答が, 8.1 (4) の解答.

8.2 (3), (4): $x > 0, y > 0$ とする.

8.3 (1): 例 8.5 (p.169) と同じ.

8.3: 各最適化問題は練習問題 6.3 とほぼ同じだが, 練習問題 6.3 の (1) と (2) では, $\alpha + \beta = 1$ が仮定されている.

8.3 (3) の解答 (p.280): $3\alpha\lambda x^{-2} \rightarrow \alpha\lambda x^{-2}, 2\beta\lambda y^{-2} \rightarrow \beta\lambda y^{-2}$

8.4: $r > -1, \beta > 0$ を仮定する.

参考文献

[1] 永田良, 田中久稔. 経済数学 (経済学教室). 培風館, 3 2012.