田中久稔『計量経済学のための数学』日本評論社を読んで

2024/07/18 版

この文書は, 上記タイトルの本をゼミナールで輪読した際の覚え書きです。何かお気づきの点がある場合は, 「`aoyama` アットマーク `bm.skr.jp`」までお知らせ頂けると助かります。

誤植と思われるところは「A(元) $\boxed{\to}$ B(修正案)」と記しています。

1 章 集合と写像

1.1 集合

p.6

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \Omega \mid x \in A_i \, (\forall i \in \mathbb{N})\}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \Omega \mid \exists i \in \mathbb{N}\colon x \in A_i\}$.

p.7

定理 1.1 の証明: $n \in \mathbb{N}$ のとき $\bigcup_i A_i \supset A_n$ だから, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(\bigcup_i A_i)^c \subset A_n^c$. よって, $(\bigcup_i A_i)^c \subset \bigcap_i A_i^c$. ここで, 各 A_i を A_i^c で置き換えると, $(\bigcup_i A_i^c)^c \subset \bigcap_i (A_i^c)^c = \bigcap_i A_i$. よって, $(\bigcap_i A_i)^c \subset \bigcup_i A_i^c$.

次に, $n \in \mathbb{N}$ のとき $\bigcap_i A_i \subset A_n$ だから, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(\bigcap_i A_i)^c \supset A_n^c$. よって, $(\bigcap_i A_i)^c \supset \bigcup_i A_i^c$. ここで, 各 A_i を A_i^c で置き換えると, $(\bigcap_i A_i^c)^c \supset \bigcup_i (A_i^c)^c = \bigcup_i A_i$. よって, $(\bigcup_i A_i)^c \supset \bigcap_i A_i^c$.

1.2 集合

p.11

$\operatorname{Im}\phi = \{\phi(x) \mid x \in X\}$ でよい.

p.14

定理 1.2: 写像 $\phi\colon X \to Y$ が全単射であるとき, またそのときにのみ, ϕ の逆写像が存在する.

p.16

p.17

定義 1.2 の (ii) を, 「適当な実数 $N(\epsilon) > 0$ を」→「適当な実数 $N(\epsilon)$ を」と修正すれば, その下の $\{n/(n+1)\}$ の例の (ii) で, $N(\epsilon) = 1/\epsilon - 1$ とできて, (iii) で

$$n > N(\epsilon), n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon.$$

p.18

定理 1.3 の証明の冒頭: $a = \min\{u \in \mathbb{R}\colon a_n \le u \, (\forall n \in \mathbb{R})\}$. この min の存在が難しい.

p.20

問題 1.1 $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\} = \{a \mid a \in A, a \notin B\} = A \cap B^c$.

問題 1.2 (2) $(A \setminus B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$, $A^c \setminus B^c = A^c \cap B$ だから, $(A \setminus B)^c \supset A^c \setminus B^c$. $A \cap B \neq \emptyset$ のとき, 等しくならない.

問題 1.3 $n \in \mathbb{N}$ のとき, $[a,b] \subset (a-1/n, b+1/n)$ だから[*1], $[a,b] \subset \bigcap_n (a-1/n, b+1/n)$. 逆向きの包含関係を示すには, $x \notin [a,b] \Rightarrow x \notin \bigcap_n (a-1/n, b+1/n)$ を示せばよい. 例えば, $x < a$ のとき, $m > 1/(a-x) \Leftrightarrow x < a - 1/m$ となる $m \in \mathbb{N}$ をとれば, $x \notin (a-1/m, b+1/m) \supset \bigcap_n (a-1/n, b+1/n)$ など.

$n \in \mathbb{N}$ のとき, $(a,b) \supset [a+1/n, b-1/n]$ だから, $(a,b) \supset \bigcup_n [a+1/n, b-1/n]$. 逆向きの包含関係を示すには, $x \in (a,b)$ のとき, $x \in [a+1/m, b-1/m]$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在することを示せばよい. $x \in (a,b)$ のとき, $m \geq \max\{1/(x-a), 1/(b-x)\}$ となる $m \in \mathbb{N}$ をとると, $x \in [a+1/m, b-1/m] \subset \bigcup_n [a+1/n, b-1/n]$.

問題 1.5 (2) 「全単射ではない」→「全射ではなく, 単射でもない」

(1) の解答 (p.234) の補足: $\phi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ の証明. $x \in \mathbb{Z}$ のとき, $\phi(x-3) = z \in \mathbb{Z}$ だから, $\phi(\mathbb{Z}) \supset \mathbb{Z}$. $\phi(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ は明らか.

(2) の解答 (p.234) の補足: $\phi(\mathbb{Z}) \subsetneq \mathbb{Z}$ である. 例えば, $x^2 - 3 = 0$ となる $x \in \mathbb{Z}$ は存在しない.

問題 1.6 の解答 (p.234) の補足: ϕ は単射ではない. 実際, $\phi(2) = \phi(6) = 1$.

$\mathbb{Q}_+$ を正の有理数全体の集合とし, 集合の濃度を $\#(\mathbb{Q}_+)$ などと表すとき, 集合の濃度の大小に関する知識を使えば, $\#(\mathbb{Q}_+) = \#(\mathbb{N})$ を示すことができる (うまい全単射が作れるかもしれないが).

証明. $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ を $f(n) = n$ で定義すると, f は単射である. よって, [1, 濃度の大小の定義 (p.68)] より, $\#(\mathbb{Q}_+) \geq \#(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. 一方, $g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ を $g(m,n) = m/n$ で定義すると, g は全射である. よって, [1, 定理 7 の系 (p.49)] と [1, 濃度の大小の定義 (p.68)] より, $\#(\mathbb{Q}_+) \leq \#(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. [1, 例 3 (p.61)] より, $\#(\mathbb{N}) = \#(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ だから, $\#(\mathbb{Q}_+) \leq \#(\mathbb{N})$. したがって, [1, 定理 3 (p.69)] より, $\#(\mathbb{Q}_+) = \#(\mathbb{N})$. □

問題 1.7 の解答 (p.234): $\delta = \sqrt{\epsilon + (a+1)^2} - (a+1)$ とおけば → $\delta = \sqrt{\epsilon + (a+1)^2} - |a+1|$ とおけば

2 章 ベクトル空間

p.26

定義 2.1 はベクトル空間の定義としては曖昧なので (そもそも L が何かわからない), とりあえず, 以降は, ベクトル空間 L は, k 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ と見なせばよい.

p.31

問: $M = \mathrm{Span}\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^k = L$ のとき, M が L の部分空間であることを示せ.

ヒント: $u, v \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ のとき, $\alpha u + \beta v \in M$ を示せばよい. $u \in M$ より, $u = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ となる $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ が存在する. 同様に, $v \in M$ より, ... よって, $\alpha u + \beta v = \sum_i \cdots$

p.32

問: 上記を使い例題 2.2 を示せ.

p.33

[*1] $a - 1/n > b + 1/n$ の場合, $(a-1/n, b+1/n) = \emptyset$ として包含関係が成り立つ.

問: $x \in L$ が線形従属であるとは? $x, y \in L$ が線形従属であるとは?

p.34 ___

問: 定義 2.5 は必要十分の形で書いてあるが (それで問題はないが), その必要はないことを説明せよ.

問: $x \in L$ が線形独立であるとは? $x, y \in L$ が線形独立であるとは?

p.36 ___

問: 定理 2.1 を示せ.

定義 3.6: この定義の前に, 部分空間 L の基底を構成するベクトルの数は, 基底のとり方によらないことを示す必要があると思われる.

p.37 ___

問: $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}\{e_1, e_2\}$ を示せ. ここで, e_1, e_2 は $\mathbb{R}^2$ の基本ベクトル.

定義 3.6 が次元の定義だとすると, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ を示すには, 「$x, y, z \in \mathbb{R}^2$ のとき, x, y, z は線形従属」を示せばよい. これを示すために, (i) $x, y \in \mathbb{R}^2$ が線形従属のとき, (ii) $x, y \in \mathbb{R}^2$ が線形独立のときに分けて考えるとよい.

$\dim \mathbb{R}^n = n$ を示すために, 次の補題 (多くの線形代数の教科書には書いてある) を認める.

補題 1. $l, m, n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}^n$,

$$b_1 = \sum_{j=1}^{l} \alpha_{1,j} a_j, \ \ldots, \ b_m = \sum_{j=1}^{l} \alpha_{m,j} a_j$$

とする. ただし, $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$. このとき, $m > l$ ならば, $b_1, \ldots, b_m$ は一次従属である.

上の補題を使うと, 次の命題が得られる. これにより, $\mathbb{R}^n$ の基底の数は n であること, つまり, $\dim \mathbb{R}^n$ には意味があって, $\dim \mathbb{R}^n = n$ となることがわかる.

命題 2. r 個のベクトル $x_1, \ldots, x_r$ が $\mathbb{R}^n$ の基底ならば, $r = n$ である.

証明. まず, $r \leq n$ であることを示そう. 基本ベクトルの列 $e_1, \ldots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底だから,

$$x_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1,j} e_j, \ \ldots, \ x_r = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{r,j} e_j$$

と表せる ($\alpha_{i,j}$ は x_i の第 j 成分). よって, 補題 1 (の対偶) より, $r \leq n$ である.

次に, $r \geq n$ であることを示そう. $x_1, \ldots, x_r$ は $\mathbb{R}^n$ の基底だから, 基本ベクトルの列 $e_1, \ldots, e_n$ を

$$e_1 = \sum_{i=1}^{r} \beta_{1,i} x_i, \ \ldots, \ e_n = \sum_{i=1}^{r} \beta_{n,i} x_i$$

と表せる. よって, 補題 1 (の対偶) より, $r \geq n$ である. □

命題 2 の証明と同様にして, 以下が示せる.

> m 個のベクトル $x_1, \ldots, x_m$ および n 個のベクトル $y_1, \ldots, y_n$ が, 部分空間 L の基底ならば, $m = n$ である.

p.38

例題 2.4 (1) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ が線形独立であることを示す.

p.38

問題 2.2 の解答: $\mathbf{0} \notin M$ だから, M は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない.

演習 2.4 の解答: 例題 2.4 (1) と同様

3 章 線形写像と行列

p.43

式 (3.4) の下: 「$\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$」 $\boxed{\to}$ 「$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$」

問: 「行列とは線形写像です.」を説明せよ.

補題 3. 写像 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を所与とし, 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ が成り立つとする. このとき, (本書の意味で) A を表現する $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ が存在する. つまり, $m \times n$ 行列 A が存在し, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $Ax = \boldsymbol{A}x$.

証明. $e_1, \dots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトルとし, $A = \begin{bmatrix} A(e_1) & \cdots & A(e_n) \end{bmatrix}$ とおくと, $\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 行列であり, $x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}' \in \mathbb{R}^n$ のとき, 仮定より,

$$A(x) = A\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_i x_i A(e_i) = \begin{bmatrix} A(e_1) & \cdots & A(e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}x. \qquad \square$$

以下,

- p.43 の式 (3.4) の行列 $\boldsymbol{A}$ を, p.41 の定義 3.1 の線形写像 A を表現する行列,
- p.41 の定義 3.1 の線形写像 A を, p.43 の式 (3.4) の行列 $\boldsymbol{A}$ により定まる線形写像といい,
- 線形写像 A と, それを表現する行列 $\boldsymbol{A}$ を同一視し, 共に A などと表す.

p.45

任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, $I(x) = x$ となる線形写像を恒等写像という. 恒等写像 I を表現する行列は単位行列 I_n であり, 単位行列 I_n よって定まる線形写像は恒等写像であることが容易に確認できる.

p.54

問: 定理 3.8 を示せ.

p.55

例題 3.2 本文書 4 ページの例題 2.4 (1) と同様

定理 3.9 の上の「$\boldsymbol{A}$ の値域が $\mathbb{R}^m$ である...」の「値域」は 9 ページの意味.

以降, $\mathbb{R}^m$ の線形部分空間に基底が存在すること[*2]を仮定する.

定理 3.9 の証明. (A が全射ならば $\operatorname{rank} A = m$) $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^m$ だから, $\operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{Im} A) =$

[*2] これも補題 1 から導ける.

$\dim \mathbb{R}^m = m$.

($\operatorname{rank} A = m$ ならば A が全射) 仮定より, $\dim(\operatorname{Im} A) = \operatorname{rank} A = m$ である．いま, $y_1, \ldots, y_m$ を $\operatorname{Im} A$ の基底とすると, $y_1, \ldots, y_m$ は一次独立だから, 次の補題 4 より, $y_1, \ldots, y_m$ は $\mathbb{R}^m$ の基底である．よって, $\operatorname{Im} A = \operatorname{Span}\{y_1, \ldots, y_m\} = \mathbb{R}^m$. □

補題 4. $\mathbb{R}^m$ の m 個のベクトル $y_1, \ldots, y_m$ が一次独立ならば, $y_1, \ldots, y_m$ は $\mathbb{R}^m$ の基底である.

証明. $z \in \mathbb{R}^m$ を任意に固定し, $z \in \operatorname{Span}\{y_1, \ldots, y_m\}$ を示せばよい．補題 1 より, $z, y_1, \ldots, y_m$ は一次従属であるから[*3], 0 ではない $(\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ が存在して, $\gamma z + \sum_i \gamma_i y_i = 0$ と表せる．ここで, $\gamma \neq 0$ である．なぜならば, $\gamma = 0$ とすると, $y_1, \ldots, y_m$ が一次独立であることから, すべての $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して $\gamma_i = 0$ となり矛盾が生じる．したがって, $z = \sum_i (-\gamma_i/\gamma)\, y_i$. つまり, $z \in \operatorname{Span}\{y_1, \ldots, y_m\}$ が示せた. □

p.57 ---

定理 3.10 の証明. $x, y \in \operatorname{Ker} A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．このとき, A は線形で, $Ax = Ay = 0$ だから, $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y = 0$. よって, $\alpha x + \beta y \in \operatorname{Ker} A$. また, $\operatorname{Ker} A \subset \mathbb{R}^n$ だから, $\operatorname{Ker} A$ は $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間である. □

問: 例題 3.5 を説明せよ.

p.58 ---

定理 3.11 の証明の概略:

- $\dim(\operatorname{Ker} A) = r$, $\operatorname{rank} A = s$ とし, $\operatorname{Ker} A$ の基底を $x_1, \ldots, x_r$, $\operatorname{Im} A$ の基底を $y_1, \ldots, y_s$ とする.
- 各 y_j $(j = 1, \ldots, s)$ に対して, $Az_j = y_j$ となる $z_j \in \mathbb{R}^n$ が存在する．$x_1, \ldots, x_r, z_1, \ldots, z_s$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であることを示す.
- $x_1, \ldots, x_r, z_1, \ldots, z_s$ が一次独立であること: $\sum_i \alpha_i x_i + \sum_j \beta_j z_j = 0$ とする．A は線形で $Ax_i = 0$ だから,
$$0 = A0 = A\Big(\sum_i \alpha_i x_i + \sum_j \beta_j z_j\Big) = \sum_i \alpha_i A x_i + \sum_j \beta_j A z_j = \sum_j \beta_j y_j.$$
よって, $\beta_j = 0$ $(j = 1, \ldots, s)$. これより, $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, r)$.
- $\operatorname{Span}\{x_1, \ldots, x_r, z_1, \ldots, z_s\} = \mathbb{R}^n$ であること: $w \in \mathbb{R}^n$ とする．$Aw \in \operatorname{Im} A$ より, $Aw = \sum_j \beta_j y_j = \sum_j \beta_j A z_j = A\Big(\sum_j \beta_j z_j\Big)$ となる $\beta_1, \ldots, \beta_s$ が存在する．よって, $A\Big(w - \sum_j \beta_j z_j\Big) = Aw - A\Big(\sum_j \beta_j z_j\Big) = 0$ だから, $w - \sum_j \beta_j z_j = \sum_i \alpha_i x_i$ となる $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ が存在する.

p.59 ---

定理 3.12 の証明. A が単射であるとする．このとき, $x \neq 0 \Rightarrow Ax \neq A0 = 0$. よって, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$. つまり, $\operatorname{Ker} A \subset \{0\}$. $\operatorname{Ker} A \supset \{0\}$ は明らかだから, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ で

[*3] いずれも, $\mathbb{R}^m$ の基本ベクトル $e_1, \ldots, e_m$ の線形結合で表されるから.

ある．逆に, $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $Ax = Ay$ とする．このとき, $A(x-y) = 0$. つまり, $x - y \in \mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ だから, $x = y$. ゆえに, A は単射である． □

定理 3.13 の証明の 1 行目: $\dim \mathbb{R}^n$ $\boxed{\to}$ n

定理 3.9, 定理 3.11, 定理 3.12 を使うと, 定理 3.13 に関連する次の定理が成り立つ.

命題 5. 線形写像 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ について, 以下は同値である.

1. A は単射である.
2. A は全射である.
3. $\mathrm{rank}\, A = n$ である.

定理 3.13 に関連して次が成り立つ.

補題 6. 線形写像 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が逆写像 A^{-1} をもつとき, 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して, $A^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha A^{-1}x + \beta A^{-1}y$ が成り立つ.

証明. $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．A は線形で, AA^{-1} は恒等写像だから

$$
\begin{aligned}
A\bigl(A^{-1}(\alpha x + \beta y) - \alpha A^{-1}x - \beta A^{-1}y\bigr) &= AA^{-1}(\alpha x + \beta y) - \alpha AA^{-1}x - \beta AA^{-1}y \\
&= \alpha x + \beta y - \alpha x - \beta y = 0.
\end{aligned}
$$

定理 3.12 および定理 3.13 より, $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ だから, $A^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha A^{-1}x + \beta A^{-1}y$. □

p.60

A を n 次正則行列とする．つまり, A が定める線形写像が全単射であるとする (p.59 定義 3.9). このとき, 線形写像 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の逆写像 A^{-1} が存在する．補題 6 および補題 3 より, A^{-1} は (本書の意味で) 線形写像であるから, A^{-1} を表現する行列が存在する．この A^{-1} を表現する行列を, A の逆行列という．以降, A の逆写像と A の逆行列を同一視し, ともに A^{-1} と表すことにする．AA^{-1} および $A^{-1}A$ は恒等写像だから, これらを表す行列は単位行列である．つまり, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ が成り立つ.

p.63, 64

演習問題 3.6 の解答 (p.234): x_k $\boxed{\to}$ x_n

第 4 章 行列式と逆行列

p.68

問: 「この行列が表現する異なる辺上の点をひとつに重ねてしまいます」を確認せよ.

p.72

問: 定理 4.1 の証明の概略を説明せよ．3 次正方行列の場合でよい.

p.75

問: 定理 4.2 の証明の概略を示せ.

p.76

定理 4.3 (iii) を「(iii') A の逆行列 A^{-1} が存在する.」と書き変え, 定理 4.3 の最後に「このとき, $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ が成り立つ.」を書き足す.

定理 4.3 の証明の概略. (i)⇔(ii) は, 定義 3.9 (p.59); (ii)⇔(iv) は, 定理 3.13 (p.59); (iv)⇔(v) は, 定理 3.11 (p.58); (iii)⇔(vi) は, 定理 4.2 (p.75) より得られる. (ii)⇔(iii') および $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ は, 6 ページの逆行列の定義 (の書き換え) を参照せよ. □

定理 4.4 を示すために, いくつか準備をする.

補題 7. A を $m \times n$ 行列とするとき, $\operatorname{Ker} A'A = \operatorname{Ker} A$.

証明. $x \in \operatorname{Ker} A$ ならば, $A'Ax = A'0 = 0$. よって, $x \in \operatorname{Ker} A'A$. つまり, $\operatorname{Ker} A'A \supset \operatorname{Ker} A$. $x \in \operatorname{Ker} A'A$ ならば, $0 = x'0 = x'A'Ax = (Ax)'(Ax) = \|Ax\|^2$. よって, $Ax = 0$. つまり, $\operatorname{Ker} A'A \subset \operatorname{Ker} A$. □

補題 8. V を $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間, $A\colon V \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とする. このとき, $\operatorname{rank} A \leq \dim V$. さらに, A が単射ならば, $\operatorname{rank} A = \dim V$.

証明. $r = \operatorname{rank} A$ とおき, $y_1, \ldots, y_r$ を $\operatorname{Im} A$ の基底とする. このとき, $y_j = Ax_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ となる $x_1, \ldots, x_r \in V$ が存在する. ここで, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $\sum_j \beta_j x_j = 0$ とすると, $\sum_j \beta_j y_j = \sum_j \beta_j Ax_j = A(\sum_j \beta_j x_j) = A0 = 0$ だから, $\beta_j = 0$ $(j = 1, \ldots, r)$. よって, $x_1, \ldots, x_r$ は一次独立である. ゆえに, $\operatorname{rank} A = r \leq \dim V$.

次に, A が単射であると仮定する. $s = \dim V$ とおき, $z_1, \ldots, z_s$ を V の基底とする. ここで, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sum_i \alpha_i Az_i = 0$ とすると, $A(\sum_i \alpha_i z_i) = 0$ だから, A が単射だから定理 3.12 より, $\sum_i \alpha_i z_i = 0$. よって, $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, s)$. つまり, $Az_1, \ldots, Az_s$ は一次独立である. ゆえに, $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A \geq s = \dim V$. □

命題 9. 線形写像 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $B\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ について, 以下が成り立つ.

1. $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A$;
2. B が全射ならば, $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} A$;
3. $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$;
4. A が単射ならば, $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} B$.

証明. $\operatorname{Im} B \subset \mathbb{R}^n$ より, $\operatorname{Im} AB = A(\operatorname{Im} B) \subset A(\mathbb{R}^n) = \operatorname{Im} A$. よって, $\operatorname{rank} AB = \dim \operatorname{Im} AB \leq \dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rank} A$. さらに, B が全射のとき, $\operatorname{Im} AB = A(\operatorname{Im} B) = A(\mathbb{R}^n) = \operatorname{Im} A$. よって, $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} A$.

A の定義域を $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 $\operatorname{Im} B$ に制限した線形写像を $\tilde{A}$ とする[*4]. このとき, $\operatorname{Im} AB = A(\operatorname{Im} B) = \tilde{A}(\operatorname{Im} B) = \operatorname{Im} \tilde{A}$. 補題 8 より, $\operatorname{rank} \tilde{A} \leq \dim \operatorname{Im} B$. よって, $\operatorname{rank} AB = \dim \operatorname{Im} AB = \dim \operatorname{Im} \tilde{A} = \operatorname{rank} \tilde{A} \leq \dim \operatorname{Im} B = \operatorname{rank} B$. さらに, A が単射のとき, 補題 8 より, $\operatorname{rank} \tilde{A} = \dim \operatorname{Im} B$. よって, $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} B$. □

[*4] $x \in \operatorname{Im} B$ に対して, $\tilde{A}x = Ax$ で $\tilde{A}\colon \operatorname{Im} B \to \mathbb{R}^m$ を定義する.

次の定理は, 結果のみ記す (詳細は, 線形代数の教科書を参照).

命題 10. A を $m \times n$ 行列とする. このとき, m 次正則行列 $P_1, \ldots, P_s$ および n 次正則行列 $Q_1, \ldots, Q_t$ が存在して, $P_1 \cdots P_s A Q_1 \cdots Q_t = F_{m,n}(r)$ が成り立つ. ここで,

$$F_{m,n}(r) = \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix},$$

I_r は r 次単位行列, $O_{i,j}$ は $i \times j$ 零行列である.

定理 4.4 の証明. まず, $\operatorname{rank} A'A = \operatorname{rank} A$ を示す. 補題 7 より, $\operatorname{Ker} A'A = \operatorname{Ker} A$. よって, $A'A$ は n 次正方行列であることに注意すると, 定理 3.11 (p.58) より, $\operatorname{rank} A'A = n - \dim \operatorname{Ker} A'A = n - \dim \operatorname{Ker} A = \operatorname{rank} A$.

次に, (ii) $\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A$ を示す. B は単射だから, 命題 9 より, $\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A$. また, C は全射だから, 命題 9 より, $\operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A$.

最後に, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A'$ を示す. 命題 10 より, 正則行列 $P_1, \ldots, P_s, Q_1, \ldots, Q_t$ が存在して,

$$P_1 \cdots P_s A Q_1 \cdots Q_t = F_{m,n}(r). \tag{1}$$

ここで, $\operatorname{rank} F_{m,n}(r) = r$ であり, (ii) より, $\operatorname{rank} P_1 \cdots P_s A Q_1 \cdots Q_t = \operatorname{rank} A$. よって, $\operatorname{rank} A = r$. また, (1) の転置行列を考えると

$$Q_t' \cdots Q_1' A' P_s' \cdots P_1' = F_{n,m}(r).$$

ここで, $\operatorname{rank} F_{n,m}(r) = r$ であり, (ii) より, $\operatorname{rank} Q_t' \cdots Q_1' A' P_s' \cdots P_1' = \operatorname{rank} A'$. よって, $\operatorname{rank} A' = r = \operatorname{rank} A$. □

p.77

定理 4.5 (i) の別証明. 工事中 □

定理 4.5 (iv) の別証明. 定理 4.5 (i) を使わずに, 定義 4.3 (p.71) から直接示す. $n-1$ 次正方行列について, 定理の結論が成り立つと仮定する. A の (i,j) 成分を a_{ij}, (i,j) 余因子を $\hat{a}_{ij}$, tA の (i,j) 成分を b_{ij}, (i,j) 余因子を $\hat{b}_{ij}$ とすると, 定義 4.3 より,

$$|tA| = \sum_{i=1}^{n} b_{i1} \hat{b}_{i1} = \sum_{i=1}^{n} (t a_{i1})(t^{n-1} \hat{a}_{i1}) = t^n \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \hat{a}_{i1} = t^n |A|.$$ □

p.78

定理 4.6 の前に次の補題を示しておく.

補題 11. A, B を n 次正方行列とし, A は正則で, $AB = I_n$ または $BA = I_n$ とする. このとき, $B = A^{-1}$.

証明. 逆行列の定義より $A^{-1}A = I_n$ だから, $AB = I_n$ のとき, $A^{-1} = A^{-1} I_n = A^{-1} AB = I_n B = B$. $BA = I_n$ の場合も同様である. □

定理 4.6 の証明. (i) 6 ページの逆行列の定義 (の書き換え). (ii) A により定まる線形写像は全単射だから, その逆写像も全単射である. よって, A^{-1} も正則である. また, $AA^{-1} = I_n$ だから, 補題 11 より, $(A^{-1})^{-1} = A$. (iii) A, B は正則だから, 行列 BA により定まる線形写像は全単射であり, 行列 BA も正則である. つまり, その逆行列が存在する. $(A^{-1}B^{-1})(BA) = I_n$ だから, 補題 11 より, $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. □

定理 4.7 (ii), (iii) の証明. (ii) 定理 4.4 より, $\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A = n$. よって, 定理 4.3 より A' は正則である. また, $AA^{-1} = I_n$ より, $I_n = I_n' = (AA^{-1})' = (A^{-1})'A'$. よって, 補題 11 より, $(A')^{-1} = (A^{-1})'$. (iii) A の (i,j) 成分を a_{ij}, (i,j) 余因子を $\hat{a}_{ij}$ とする. A の (i,j) 成分は a_{ji} だから, 定義 4.3 より, $|A'| = \sum_j a_{1j}\hat{a}_{1j}$. また, 定理 4.1 より, $|A| = \sum_j a_{1j}\hat{a}_{1j}$. 以上から, $|A'| = |A|$. □

p.79

問題 4.4: 定理 4.7 (ii) より, $\left(A^{-1}\right)' = (A')^{-1} = (A)^{-1} = A^{-1}$.

問題 4.5: A, B, $A^{-1} + B^{-1}$ が正則であることを仮定する. 一般に, 「A, B が正則 $\Rightarrow$ $A + B$ が正則」は成り立たない.

第 5 章 内積と射影

p.86

定義 5.3: x と y が直交するとき, $x \perp y$ と表す. (追加)

p.87

問: 定理 5.4 を示せ.

p.88

M を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする. このとき, 直交補空間 $M^\perp$ は部分空間である. (定理 5.4 は不要)

証明. $x \in M$, $u, v \in M^\perp$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする. $x'u = x'v = 0$ だから, $x'(\alpha u + \beta v) = \alpha x'u + \beta x'v = 0$. よって, $\alpha u + \beta v \in M^\perp$. □

問: 例題 5.3

p.89

定義 5.6 が問題ないこと (well-defined である) を確認するために, 以下を示そう.

補題 12. M を $\mathbb{R}^n$ の部分空間, $y \in \mathbb{R}^n$, $x_1, \ldots, x_k$ を M の基底とし[*5], $X = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_k \end{bmatrix}$ とおく. このとき, 以下が成り立つ.

1. $\operatorname{rank} X = k$.
2. k 次正方行列 $X'X$ は正則である.
3. $y^* = X(X'X)^{-1}X'y$ とおくと, $y^* \in M$ であり, $(y - y^*) \perp M$ である.
4. $z \in M$, $(y - z) \perp M$ ならば, $z = y^*$.

[*5] 部分空間に基底が存在することは認める.

証明. 仮定より, X は $n \times k$ 行列で, $\operatorname{rank} X = k$ であることがわかる. ゆえに, 定理 4.4 より, $\operatorname{rank} X'X = k$. よって, 定理 4.3 より, $X'X$ は正則である. y^* の定義より, $y^* \in M$ がわかる. さらに,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_k' \end{bmatrix} (y - y^*) = X'(y - y^*) = X'y - X'y^* = X'y - X'X(X'X)^{-1}X'y = X'y - X'y = 0.$$

よって, $i = 1, \ldots, k$ に対して, $x_i'(y - y^*) = 0$. ゆえに, 定理 5.4 より, $(y - y^*) \perp M$ である. 仮定より, $(y^*)'(y - y^*) = (y^*)'(y - z) = z'(y - y^*) = z'(y - z) = 0$ だから, $(y^*)'y = (y^*)'y^* = (y^*)'z$, $z'y = z'y^* = z'z$ である[*6]. よって,

$$\|y^* - z\|^2 = (y^* - z)'(y^* - z) = (y^*)'y^* - (y^*)'z - z'y^* + z'z = 0.$$

ゆえに, $z = y^*$. □

補題 12 より, M を $\mathbb{R}^n$ の部分空間, $y \in \mathbb{R}^n$ とするとき,

$$(y - y^*) \perp M \text{ となる } y^* \in M \text{ が一意に存在する}$$

ことがわかった. つまり, 定義 5.6 は well-defined である. 以下, 写像 $y \in \mathbb{R}^n \mapsto y^* \in M$ を射影とよぶ (本書ではそうしていないが).

p.90

定理 5.5: 補題 12 より直ちに得られる. $X(X'X)^{-1}X'$ が射影 (という線形写像) を表す行列である.

p.91

例題 5.4: 実数を 1×1 行列と見なすとき, その逆行列は逆数である. これをどこかで説明しておく.

p.92

定義 5.7: $n \geq k$, $M = \operatorname{Im} X$, $\operatorname{rank} X = k$ を仮定する. この後の定理 5.6 より, M 上への射影行列により定まる $\mathbb{R}^n$ から M への線形写像は, 全射であることがわかる[*7]

定理 5.6 の証明. (ii) 補題 12 より, $P_M(y) \in M$ だから, $y - P_M(y) \in M$. また, $\bigl(y - P_M(y)\bigr) \perp M$ だから, $\bigl(y - P_M(y)\bigr) \perp \bigl(y - P_M(y)\bigr)$. つまり, $\|y - P_M(y)\|^2 = \bigl(y - P_M(y)\bigr)'\bigl(y - P_M(y)\bigr) = 0$. よって, $y = P_M(y)$.

(i) $x \in \mathbb{R}^n$ とする. 補題 12 より, $P_M(x) \in M$ だから, (ii) より, $(P_M)^2(x) = P_M\bigl(P_M(x)\bigr) = P_M(x)$.

(iii) 補題 12 より, $\operatorname{Im} P_M \subset M$. また, (ii) より, $\operatorname{Im} P_M \supset M$.

(iv) 定理 3.5 および定理 4.7 より, $(P_M)' = \bigl(X(X'X)^{-1}X'\bigr)' = (X')'\bigl((X'X)^{-1}\bigr)'X' = X\bigl((X'X)'\bigr)^{-1}X' = X\bigl(X'(X')'\bigr)^{-1}X' = X(X'X)^{-1}X' = P_M$. □

[*6] これらは, すべて等しい.

[*7] M 上への射影行列により定まる線形写像は, M の上への写像である.

次の命題より, 定理 5.6 の (i) と (ii) は同値と考えてよい.

命題 13. $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を写像とし, $M = \operatorname{Im} P$ とおく. このとき, (i) $P^2 = P$ と (ii) $y \in M \Rightarrow Py = y$ は同値である.

証明. (i)⇒(ii): $y \in M$ とする. $y = Px$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する. よって, $Py = PPx = Px = y$. (ii)⇒(i): $x \in \mathbb{R}^n$ とする. $Px \in M$ だから, $P^2x = PPx = Px$. □

p.93 ―――――――――――――――――――――――――――――――――

命題 14 (定理 5.7 の修正版)**.** P_M を定理 5.6 の (ii) および (iv) を満たす行列とし, $Q_M = I - P_M$ とおく. このとき, 任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対して, $Q_M y \in M^\perp$ かつ $(y - Q_M y) \perp M^\perp$ である. つまり, Q_M により定まる線形写像は $M^\perp$ への射影である.

証明. $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in M$ とする. $P_M = {P_M}'$ および $P_M z = z$ より, ${Q_M}'z = (I' - {P_M}')z = z - P_M z = 0$. よって, $(Q_M y)'z = y'{Q_M}'z = y'0 = 0$. これより, $Q_M y \in M^\perp$ が示せた. また, $y - Q_M y = P_M y \in M$ だから, 任意の $x \in M^\perp$ に対して $(y - Q_M y)'x = 0$. つまり, $(y - Q_M y) \perp M^\perp$. □

定理 5.8 は, 次の二つの補題から示せる.

補題 15. V, W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間, $V \cap W = \{0\}$, $x \in V + W = \{v + w\colon v \in V, w \in W\}$ とする. このとき, $x = a + b$ となる $a \in V$ および $b \in W$ がそれぞれ一意に存在する.

証明. 仮定より, $x = a_1 + b_1$ となる $a_1 \in V$ および $b_1 \in W$ が存在する. いま, $x = a_2 + b_2$, $a_2 \in V$ および $b_2 \in W$ とすると, $a_1 - a_2 = b_2 - b_1 \in V \cap W = \{0\}$ だから, $a_1 = a_2$ かつ $b_1 = b_2$. □

補題 16. M を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする. このとき, $M \cap M^\perp = \{0\}$ かつ $M + M^\perp = \mathbb{R}^n$ である.

証明. $x \in M \cap M^\perp$ とすると, $\|x\|^2 = x'x = 0$. よって, $x = 0$. ゆえに, $M \cap M^\perp \subset \{0\}$. $M \cap M^\perp \supset \{0\}$ は自明だから, $M \cap M^\perp = \{0\}$ が示せた.

$x_1, \dots, x_k$ を M の基底とし, $X = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_k \end{bmatrix}$ とおき, P_M を (5.13) で定義し, $y \in \mathbb{R}^n$ とする. 定理 5.6 および命題 14 より, $y = P_M y + (I - P_M)y \in M + M^\perp$ だから, $M + M^\perp \supset \mathbb{R}^n$. $M + M^\perp \subset \mathbb{R}^n$ は自明だから, $M + M^\perp = \mathbb{R}^n$ が示せた. □

p.94 ―――――――――――――――――――――――――――――――――

定理 5.9 の証明. (i), (ii), (v) は定理 5.6 からすぐに得られるので, 以下, (iii) と (iv) を示す. P_M を P, I_n を I と表す.

(iii): $z \in M^\perp$ とする. このとき, $Pz \in M$ であるから, 定理 5.6 (iv) および (i) より,

$$\|Pz\|^2 = (Pz)'(Pz) = z'P'Pz = z'P^2z = z'Pz = 0.$$

よって, $Pz = 0$ である[*8]. したがって, $(I-P)z = z$.

(iv): $\mathrm{Im}(I-P) = \mathrm{Ker}\,P$ を示す. まず, $y \in \mathrm{Im}(I-P)$ のとき, $y = (I-P)x$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在するから, 定理 5.6 (ii) より, $Py = P(I-P)x = (P-P^2)x = Ox = 0$. よって, $y \in \mathrm{Ker}\,P$. 次に, $y \in \mathrm{Ker}\,P$ のとき, $Py = 0$ だから, $y = y - Py = (I-P)y \in \mathrm{Im}(I-P)$. よって, $y \in \mathrm{Im}(I-P)$. 以上から, $\mathrm{Im}(I-P) = \mathrm{Ker}\,P$ が示せた. この等式, 定理 3.11 (58 ページ), 定理 5.6 (iii) より,

$$\mathrm{rank}(I-P) = \dim \mathrm{Im}(I-P) = \dim \mathrm{Ker}\,P = n - \mathrm{rank}\,P = n - k. \qquad \square$$

本書の定理 5.9 の証明の「射影の定義より $\mathrm{Im}(I_n - P_M) = M^\perp$」について: 上に書いた定理 **5.9** の証明より,

$$\mathrm{Im}(I_n - P_M) = \mathrm{Ker}\,P_M \supset M^\perp$$

である. $z \in \mathrm{Ker}\,P_M$ のとき, 定理 14 より, $z = (I-P)z \in M^\perp$. よって, $\mathrm{Ker}\,P_M = M^\perp$.

p.95

演習問題 5.5: [直交すること] $m = 2$ のとき: $w_1' w_2 = 0$ を示す. $m = 3$ のとき: $w_1' w_2 = 0$ を使って, $w_1' w_3 = w_2' w_3 = 0$ を示す. $m \geq 3$ のとき, $w_i' w_j = 0$ $(i, j \in \{1, \ldots, m-1\}, i \neq j)$ を使って, $w_i' w_m = 0$ $(i \in \{1, \ldots, m-1\}, i \neq j)$ を示す.

[基底であること] 以下を使えばよい. 「0 ではない $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ が互いに直交するとき, $x_1, \ldots, x_k$ は一次独立である.」実際, $\sum_i c_i x_i = 0$ とすれば, $0 = x_j' 0 = x_j' \sum_i c_i x_i = c_j x_j' x_j = c_j \|x_j\|^2$. よって, $x_j \neq 0$ より $c_j = 0$.

第 6 章 二次形式と対角化

p.104

定義 6.4 で $\ell \neq 0$ とする理由は?

p.106

定理 6.1 の書き換え: k 次正方行列 A の固有値 λ は, 方程式 (6.6) の解である. 逆に, 方程式 (6.6) の解は, A の固有値である.

固有ベクトルは方向のみ定まって大きさは定まらない...(下から 4 行目): $\boldsymbol{\ell}$ が固有ベクトルのとき, $\alpha\boldsymbol{\ell}$ も固有ベクトルになり (ただし, $\alpha \neq 0$), 一つに決まらないという意味だろう.

p.108

系 6.1 の証明. (代数学の基本定理をみとめれば,) 「定理 6.1 の書き換え」より, $|\lambda I_k - A| = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_k)$. ここで, $\lambda = 0$ とすると, 定理 4.5 より, $(-1)^k |A| = |-A| = (-1)^k \lambda_1 \cdots \lambda_k$. $\square$

参考文献

[1] 松坂和夫. 集合・位相入門. 岩波書店, 6 1968.

[*8] $M^\perp \subset \mathrm{Ker}\,P$ が示せた