市原直幸・増田哲・松本裕行『解析学入門』培風館を読んで

2022/12/12 版

これは, 上記の本をゼミナールで輪読した際の覚え書きです。何かお気づきの点がありましたら, 「`aoyama` アットマーク `bm.skr.jp`」までお知らせください。以下, 誤植または修正した方がいいと思われるところを「A(元) $\boxed{\to}$ B(修正案)」と記しています。

1. 実数，集合，数列

p.11

例題 1.10: $\{b_n\}$ が収束するとき $\lim_n \sqrt{b_n} = \sqrt{\lim_n b_n}$ を使う.

p.12

例題 1.11: $\alpha = \beta$ の証明に $\beta = \sqrt{\alpha\beta}$ は不要.

p.14

例 1.7: 仮定 $a > 0$, $r \neq 0$ は不要と思ったが, $r > 1$, $r \leq -1$ のときも一緒に書くために必要.

p.15

例題 1.15 の $\sum_n 1/n = \infty$: $M \in \mathbb{R}$ が与えられたとき, $k \geq 2M$ となる $k \in \mathbb{N}$ をとる. このとき, $n \geq 2^k$ に対して, $\sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^{2^k} a_i = 1 + k/2 \geq 1 + M > M$.

p.16

★注意: 冒頭の「正項級数」はなくてもよい.

p.18

定理 1.17 ($e = \sum_n 1/n!$) の証明: 収束することは, 定理 1.14 より. 後半の $e \geq \sum_k 1/k!$ の証明: $r \in \mathbb{N}$ を固定するとき, 任意の $n \geq r$ に対して

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{r!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right)$$

が成り立つことがわかる. よって, $n \to \infty$ とすれば

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{r!} = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!}.$$

これがすべての $r \in \mathbb{N}$ で成り立つので, $r \to \infty$ とすれば, $e \geq \sum_k 1/k!$ を得る.

p.19

定理 1.18 (e は無理数である) の証明: $2 < e < 3$ であることは, 定理 1.16 の証明で示した. p を 2 以上の整数とし,

$$\alpha = p!\left(e - \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n}\right) = p!e - \sum_{n=0}^{p} \frac{p!}{n}$$

とおく．定理 1.17 より, $e=\sum_n 1/n!$ だから,

$$0<\alpha=\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{p!}{n}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\cdots$$
$$\leq\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)^2}+\cdots=\frac{1/(p+1)}{1-1/(p+1)}=\frac{1}{p}<1.$$

ここで, e が有理数である, つまり, 互いに素な $p,q\in\mathbb{N}$ が存在して, $e=q/p$ とする．このとき, $p\geq 2$ であり, $p!e=(p-1)!q$ は整数, $n=0,\ldots,p$ に対して $p!/n!$ も整数である．したがって, α も整数となるが, これは $0<\alpha<1$ に矛盾する．

2. 関数

p.22

通常, 対応を, $\boxed{\rightarrow}$ 通常, x と y との対応を,

p.26

5 行目: $f(x)$ が収束するならば, α を**左極限値** $\boxed{\rightarrow}$ $f(x)$ が α に収束するならば, α を $x=a$ における f の**左極限値**

例 2.6: その上の右極限値などの例ではない．

p.27

定理 2.4 の前に補題を二つ準備する．

補題 1. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を α に収束する数列とし, $n\in\mathbb{N}$, $n\leq x<n+1$ のとき, $a_n\leq f(x)\leq b_n$ が成り立つとする．このとき, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$.

証明. $\epsilon>0$ とする．仮定より, $N\in\mathbb{N}$ が存在して, $n\geq N$ ならば $|a_n-\alpha|<\epsilon$, $|b_n-\alpha|<\epsilon$ が成り立つ．$x\geq N$ とすると, $m\in\mathbb{N}$ が存在して, $N\leq m\leq x<m+1$. よって, 仮定より, $a_m\leq f(x)\leq b_m$. $f(x)\leq\alpha$ のとき, $a_m\leq f(x)\leq\alpha$ だから,

$$0\leq\alpha-f(x)\leq\alpha-a_m<\epsilon.$$

$f(x)>\alpha$ のとき, $\alpha<f(x)\leq b_m$ だから,

$$0<f(x)-\alpha<b_m-\alpha<\epsilon.$$

したがって, $x\geq N$ ならば $|f(x)-\alpha|<\epsilon$. つまり, 結論が示せた．□

補題 2. $\lim_{t\to-\infty}\phi(t)=\infty$, $\lim_{s\to\infty}f(s)=\alpha\in\mathbb{R}$ のとき, $\lim_{t\to-\infty}f\bigl(\phi(t)\bigr)=\alpha$.

証明. $\epsilon>0$ を固定する．仮定より, $K\in\mathbb{R}$ が存在して, $s>K$ ならば $|f(s)-\alpha|<\epsilon$. 仮定より, この K に対して, $M\in\mathbb{R}$ が存在して, $t<M$ ならば $\phi(t)>K$. よって, $t<M$ ならば $\bigl|f\bigl(\phi(t)\bigr)-\alpha\bigr|<\epsilon$. □

定理 2.4: $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=\lim_{x\to-\infty}(1+1/x)^x=e$ の証明: $x>1$ のとき, $n\leq x<n+1$

となる $n\in\mathbb{N}$ をとると,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

ここで,

$$\lim_n \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_n \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e,$$
$$\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

だから, 補題 1 より, $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$.

$x<0$ とする．このとき,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1+1}.$$

ここで, $\lim_{x\to-\infty}(-x-1)=\infty$ だから, $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x-1}\right)=1$ であり, 補題 2 より

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1} = e$$

だから,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\cdot 1 = e.$$

p.29 ―――

例 2.7: 2 次関数は連続だから

p.30 ―――

例 2.8 (2): 値域は... 集合 $\{y\in\mathbb{R}\colon y\neq 0\}$ $\boxed{\to}$ 値域は $\mathbb{R}\setminus[0,-1)$ である．実際, $|x|>1$ のとき, $1/(x^2-1)>0$. $|x|<1$ のとき, $0\le x^2<1 \Leftrightarrow -1\le x^2-1<0 \Leftrightarrow -1\ge 1/(x^2-1)$ など.

p.32 ―――

$\tanh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ より, $\lim_{x\to\infty}\tanh x = 1$, $\lim_{x\to-\infty}\tanh x = -1$.

p.37 ―――

$\sin x = y$ を満たす $x\in[-\pi/2,\pi/2]$ を (-8, -7 行目): このような x の存在は, sin の連続性と中間値の定理より.

p.40 ―――

章末問題 2.9: $g(x)=f(x+T/2)-f(x)$ で関数 g を定義する．$g(b)=0$ のとき, $a=b$ とすればよい．$g(b)>0$ のとき, $g(b+T/2)=f(b+T)-f(b+T/2)=f(b)-f(b+T/2)=-g(b)>0$. g は $[b,b+T/2]$ で連続だから, 中間値の定理より, $g(a)=0$ となる $a\in(b,b+T/2)$ が存在する.

3. 微分

p.41 ―――

$|h|$ が十分小として $\boxed{\to}$ $a+h\in I$ として